Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 20 mars 2023

Épreuve de Mathématiques 8

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
Ne pas utiliser de correcteur.
Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Notons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Partie 1 (Étude d'une équation différentielle)
On considère l'équation différentielle :

$$x^2 y' + y = x \qquad (\mathscr{E})$$

1) Justifier l'existence de $\varphi(x)$, pour tout $x > 0$.

2) Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et donner, pour $x \in [a, b]$, l'expression de la dérivée $\varphi'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

3) En déduire que φ est classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, puis montrer que φ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.

4) On suppose qu'il existe une série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et dont la fonction somme F est solution de $(\mathscr{E})$ sur $]-R, R[$.

- **a)** Déterminer une relation de récurrence liant a_n et a_{n-1}, pour tout $n \geqslant 2$.
- **b)** Déterminer l'expression de (a_n) en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **c)** Quel est le rayon de convergence de F ? Que peut-on en déduire ?

Partie 2 (Détermination d'une valeur approchée de $\varphi(x)$)
Désormais, $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$, on a

$$\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$$

2) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
En déduire que

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

3) On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$

a) Calculer $I_0(x)$.

b) Donner pour $k \in \mathbb{N}$ une relation entre $I_{k+1}(x)$ et $I_k(x)$.

c) En déduire que $I_k(x) = k!x^{k+1}$.

4) On pose désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! x^{k+1}$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leqslant (n+1)!x^{n+2}$.

b) On suppose désormais que $x = \dfrac{1}{10}$, et on pose $u_n = (n+1)!(1/10)^{n+2}$. En étudiant le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que la suite (u_n) est minimale pour $n = 8$.

c) À quelle précision peut-on obtenir une valeur de $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right)$, à l'aide des questions précédentes ?

5) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k k! z^{k+1}$? Cette série est-elle convergente pour $z = \dfrac{1}{10}$?

Cet exercice est une illustration de la citation suivante de Henri Poincaré :
« Il y a entre les géomètres[1] *et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. »*

Exercice 2

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1) En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.

2) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3) **a)** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$.

b) Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

1. L'analyse est à cette époque considérée comme une partie de la géométrie.

c) On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

d) En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = f(x)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

4) Démontrer alors que pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5) En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

6) Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3 (Normes équivalentes)

On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt.$$

1) Démontrer que $\|\ \|$ définit une norme sur E.
De même, $\|\ \|'$ est une norme sur E, il est inutile de le démontrer.

2) **a)** Donner la définition de deux normes équivalentes.

b) Démontrer que les deux normes $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ sont équivalentes sur E.

3) Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à la norme $\|\ \|$?

Exercice 4

On note ℓ^∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées et $\|.\|_\infty$ la norme sur ℓ^∞ définie par

$$\forall u = (u_n), \qquad \|u\|_\infty = \sup\{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

1) Démontrer que l'espace vectoriel F des suites réelles convergentes et de limite nulle est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$.

2) On note E l'ensemble des suites réelle $u = (u_n)$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de F.

b) Montrer que $E \neq F$.

c) L'ensemble E est-il une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$? Quelle est son adhérence ? Indication : *On pourra considérer des suites à support fini bien choisies.*

3) On note Φ l'application qui, à tout élément $u = (u_n)$ de E, associe la suite $r = (r_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$$

a) Calculer $\|u\|_\infty$ et $\|\Phi(u)\|_\infty$ lorsque u est une suite géométrique convergente de premier terme $u_0 = 1$.

b) Démontrer que Φ est une application linéaire injective de E dans ℓ^∞, dont l'image est F.

c) On note $\Psi : E \to F$ définie par $\Psi(u) = \Phi(u)$. C'est donc une bijection de E sur F. La norme considérée est toujours la norme infinie.

i) L'application Ψ est-elle continue ?

ii) L'application Ψ^{-1} est-elle continue ?

FIN DE L'ÉPREUVE