

Épreuve de Mathématiques 8

Correction

Exercice 1 (PT 2021)

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$: X_n suit une loi de Bernoulli.
La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(X_1 = x)_{x\in X_1(\Omega)}$, c'est-à-dire $\Big((X_1 = 0), (X_1 = 1)\Big)$, s'écrit

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbb{P}(X_2 = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) \\ &= (1 - \alpha)p_1 + \beta(1 - p_1) \end{aligned}$$

Car $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 1)$. Conclusion :

$$\boxed{p_2 = (1 - \alpha - \beta)p_1 + \beta}$$

b) Plus généralement, la formule des probabilités totales s'écrit

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 0)\mathbb{P}(X_n = 0) \\ &= (1 - \alpha)p_n + \beta(1 - p_n) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{p_{n+1} = (1 - \alpha - \beta)p_n + \beta}$$

c) *Pour étudier une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$, on commence par chercher le point fixe de $f : x \mapsto ax + b$. C'est-à-dire résoudre $f(\ell) = \ell$. Puis on pose $v_n = u_n - \ell$, qui sera une suite géométrique.*
Point fixe : $\ell = \beta + (1 - \alpha - \beta)\ell$, i.e. $\ell = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$ car $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = p_n - \ell$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} &= (1 - \alpha - \beta)p_n + \beta - \ell \\ &= (1 - \alpha - \beta)v_n + (1 - \alpha - \beta)\ell + \beta - \ell \\ &= (1 - \alpha - \beta)v_n + (-\alpha - \beta)\frac{\beta}{\alpha + \beta} + \beta \\ &= (1 - \alpha - \beta)v_n \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = (1 - \alpha - \beta)^{n-1}v_1$, et $v_1 = p_1 - \ell$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad p_n = v_n + \ell = (1 - \alpha - \beta)^{n-1}(p_1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta}) + \frac{\beta}{\alpha + \beta}}$$

d) Comme $0 < \alpha < 1$, $1 - \alpha \in]0, 1[$, et $1 - \alpha - \beta \in] - \beta, 1 - \beta[$. Or β est une probabilité, donc $] - \beta, 1 - \beta[\subset] - 1, 1[$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\beta}{\alpha + \beta}}$$

2) **a)** On suppose que $p_1 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$, donc, d'après 1c,

$$\forall n \geqslant 1, \quad p_n = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

Ainsi,

$$\boxed{X_2 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p_2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

b) $(X_1, X_2)(\Omega) = \{0,1\}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\
&= (1-\alpha)p_1 \\
&= \frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta} \\
\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) &= \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\
&= \alpha p_1 \\
&= \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) \\
&= \beta(1-p_1) \\
&= \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \\
\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) &= \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) \\
&= (1-\beta)(1-p_1) \\
&= \frac{(1-\beta)\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

Pour vérifier ses calculs, on peut vérifier que $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{z \in \{0,1\}^2} \mathbb{P}((X_1, X_2) = z) = 1$.

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \dfrac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta} & \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \\
\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} & \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \dfrac{(1-\beta)\alpha}{\alpha+\beta}
\end{array}}$$

c) Pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit une loi $\mathscr{B}(p_n)$, donc $E(X_n) = p_n$ et $V(X_n) = p_n(1-p_n)$. Comme p_n est constant,

$$\boxed{E(X_1) = E(X_2) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad V(X_1) = V(X_2) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}}$$

d) Les X_n sont des variable aléatoire discrète finies, donc $\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2)$ existe et

$$\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

D'après le théorème du transfert,

$$\begin{aligned}
E(X_1X_2) &= \sum_{(i,j) \in \{0,1\}^2} ij \quad \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) && \text{Car } ij = 0 \text{ si } i = 0 \text{ ou } j = 0 \\
&= \frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

On pouvait aussi remarquer que $X_1X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}((1-\alpha)\beta/(\alpha+\beta))$, *et en déduire immédiatement* $E(X_1X_2)$.

Puis

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_1, X_2) &= \frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta} - \Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\Big)^2 \\
&= \frac{(\beta-\alpha\beta)(\alpha+\beta)-\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{\beta\alpha-\alpha^2\beta+\beta^2-\alpha\beta^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{\beta\alpha-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \frac{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^2}}$$

e) Si les variables X_1 et X_2 étaient indépendantes, $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = 0$. C'est-à-dire $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ou $1-\alpha-\beta = 0$. Or les deux premier cas sont exclus par l'énoncé, donc il reste le cas $\alpha+\beta = 1$ à étudier.

La covariance vous donne une indication : si elle est non nulle, alors les variables ne sont pas indépendantes, mais pas la réciproque. Pour prouver l'indépendance, il vous faut, nécessairement, la loi du couple.

Supposons $\alpha+\beta = 1$: $\beta = 1-\alpha$ et $p_1 = p_2 = 1-\alpha$. Donc $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(1-\alpha)$. La loi du couple (X_1, X_2) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) &= (1-\alpha)^2 = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) \\
\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) &= \alpha(1-\alpha) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 1) \\
\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) &= \alpha(1-\alpha) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 0) \\
\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) &= \alpha^2 = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0)
\end{aligned}$$

Donc X_1 et X_2 sont indépendantes.

Comme $X_n(\Omega)$ est de cardinal 2, il suffit de traiter un des cas, le reste se déduit en passant à l'événement contraire. Mais le raisonnement serait aussi long que le calcul direct des différents cas.

$$\boxed{\text{Les variables } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes si et seulement si } \alpha+\beta = 1}$$

3) Désormais $p_1 = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$. Par définition,

$$N = \inf\{n \in \mathbb{N}^* | X_n = 0\}$$

Comme $p_1 = 1$, $N(\Omega) = [\![2, +\infty[\![\cap \{\infty\}$. Soit $n \geqslant 2$,

$$(N = n) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)$$

Ainsi, par formule des probabilités composées, comme X_k ne dépend que de X_{k-1},

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = n) &= \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_{n-1} = 1 | X_{n-2} = 1) \times \mathbb{P}(X_n = 0 | X_{n-1} = 1) \\
&= p_1 \left(\prod_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}(X_{k+1} = 1 | X_k = 1)\right) \mathbb{P}(X_n = 0 | X_{n-1} = 1) \\
&= (1-\alpha)^{n-2}\alpha
\end{aligned}$$

De plus, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} (1-\alpha)^n = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)} = 1$, donc par passage à l'événement contraire, $P(N = \infty) = 0$.

Par conséquent, la loi de $Z = N - 1$ est

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(N - 1 = n) = \mathbb{P}(N = n + 1) = (1 - \alpha)^{n-1}\alpha$$

Conclusion :

$$\boxed{Z = N - 1 \hookrightarrow \mathscr{G}(\alpha)}$$

4) **a)** *Semblable à la question de cours avec des lois de Poisson, en plus simple.* $(Y_1 + Y_2)(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.
Pour tout $n \geqslant 2$, Comme $(Y_1 = k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_1 = k, Y_1 + Y_2 = n) && \text{Formule des probabilités totales}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(Y_1 = k, Y_2 = n - k) && \text{Somme jusqu'à } n-1 \text{ car } Y_2 \geqslant 1\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(Y_1 = k)\mathbb{P}(Y_2 = n - k) && Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ sont indépendantes}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}\\
&= p^2(1-p)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1} 1\\
&= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}
\end{aligned}$$

Finalement, la loi de $Y_1 + Y_2$ est donnée par

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \quad \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$

b) (Question de cours). La fonction de répartition F_Z de Z est définie par $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leqslant x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in N^*$ fixé. Comme

$$(Z \geqslant n) = (Y_1 \geqslant n) \cap (Y_2 \geqslant n)$$

il vient, par indépendance de Y_1 et Y_2,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) = \mathbb{P}(Y_1 \geqslant n)\mathbb{P}(Y_2 \geqslant n)$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1 \geqslant n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_1 = k)\\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}\\
&= p(1-p)^{n-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k\\
&= (1-p)^{n-1}
\end{aligned}$$

Et de même pour Y_2. Donc

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) = (1-p)^{2n-2}$$

Par passage à l'événement contraire, $\overline{(Z \leqslant n)} = (Z > n) = (Z \geqslant n + 1)$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leqslant x) = \mathbb{P}(Z \leqslant \lfloor x \rfloor) = 1 - \mathbb{P}(Z \geqslant \lfloor x \rfloor + 1) = 1 - (1-p)^{2\lfloor x \rfloor}$$

De plus, comme $[\![n,+\infty[\![=\{n\}\cup[\![n+1,+\infty[\![$,

$$(Z\geqslant n)=(Z=n)\cup(Z\geqslant n+1)$$

Les unions sont disjointes, donc

$$\mathbb{P}(Z\geqslant n)=\mathbb{P}(Z=n)+\mathbb{P}(Z\geqslant n+1)$$

Puis

$$\mathbb{P}(Z=n)=\mathbb{P}(Z\geqslant n)-\mathbb{P}(Z\geqslant n+1)=(1-p)^{2n-2}[1-(1-p)^2]$$

Donc $\boxed{Z\hookrightarrow\mathscr{G}\Big(1-(1-p)^2\Big)}$

c) $T(\Omega)=\mathbb{N}^*$. On procède comme ci-dessus.
Soit $n\in N^*$ fixé. Comme

$$(T\leqslant n)=(Y_1\leqslant n)\cap(Y_2\leqslant n)$$

il vient, par indépendance de Y_1 et Y_2,

$$\mathbb{P}(T\leqslant n)=\mathbb{P}(Y_1\leqslant n)\mathbb{P}(Y_2\leqslant n)$$

Or $\mathbb{P}(Y_1\leqslant n)=1-\mathbb{P}(Y_1\geqslant n+1)=1-(1-p)^n$ d'après ci-dessus, question b. Donc

$$\mathbb{P}(T\leqslant n)=[1-(1-p)^n]^2$$

De plus, comme ci-dessus,

$$(T\leqslant n)=(T=n)\cup(T\leqslant n-1)$$

Les unions sont disjointes, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=n)&=\mathbb{P}(T\leqslant n)-\mathbb{P}(T\leqslant n-1)\\&=[1-(1-p)^n]^2-[1-(1-p)^{n-1}]^2\\&=\Big[1-(1-p)^n-(1-(1-p)^{n-1})\Big]\Big[1-(1-p)^n+1-(1-p)^{n-1}\Big]\\&=\Big[(1-p)^{n-1}(1-(1-p))+\Big]\Big[2-(1-p)^{n-1}(1-p+1)\Big]\\&=p(1-p)^{n-1}\Big[2-p(2-p)(1-p)^{n-1}\Big]\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(T=n)=p(1-p)^{n-1}\Big[2-p(2-p)(1-p)^{n-1}\Big]}$$

5) Si on note N_i le numéro du jour où l'appareil $i\in\{1,2\}$ tombe en panne pour la première fois, alors $N=\min(N_1,N_2)$ est le jour de la première panne.
De plus, $N-1=\min(N_1-1,N_2-1)$. D'après 3, N_1-1 et N_2-1 suivent une loi géométrique de paramètre α, donc d'après 4b, $N-1$ suit une loi géométrique de paramètre $1-(1-\alpha)^2$.
La quantité demandée est l'espérance de N : par linéarité de l'espérance,

$$E(N)=E(N-1+1)=1+E(N-1)$$

L'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $1/p$, donc finalement

$$\boxed{E(N)=1+\frac{1}{1-(1-\alpha)^2}}$$

Exercice 2 (PT 2021)

Partie I

1) **a)** D'après le théorème spectral, la matrice B est **symétrique réelle**, donc g est diagonalisable dans une base orthonormée.

b) Polynôme caractéristique :

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 1 \\ 3 & x-3 & 3 \\ 1 & 3 & x-1 \end{vmatrix} C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & x-3 & 3 \\ 1 & 3 & x-1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$= (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & x-6 & 2 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+3)(x-6)(x-2) \qquad \text{(triangulaire)}$$

Finalement, les valeurs propres, toutes de multiplicité 1, sont

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(g) = \{-3, 2, 6\}}$$

*N'oubliez pas de **vérifier vos calculs** avec la trace, égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité*

$$\boxed{\mathrm{Tr}\ B = 1 + 3 + 1 = 5 = -3 + 2 + 6}$$

Sous-espaces propres : *Vous devez être capable de résoudre un système 3×3 pour trouver une base de vecteurs propres. Et être capable de détecter une erreur lorsque vous trouvez un sous-espace propre réduit à $\{0\}$: pas d'équation qui disparaît pour éviter 0, pas de vecteur nul dans la base (!).*
Second temps : vous devez etre capable de rédiger correctement et lisiblement, avec des équivalence et des $X \in$ où il faut, pour qu'on en déduise $E_\lambda = \mathrm{Vect}\,(\dots)$ comme on prouve $A \subset B$ via $x \in A \Longrightarrow x \in B$.

$E_{-3} = \mathrm{Ker}\,(-3I_3 - B)$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-3} \iff \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} X = 0$$

$$\iff \begin{cases} -4x + 3y + z = 0 \\ 3x - 6y + 3z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow L_1 + 4L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} 15y - 15z = 0 \\ -15y + 15z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3y - 4z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3y + 4z = z \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_{-3} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$E_2 = \mathrm{Ker}\,(2I_3 - B)$:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2 \iff \begin{pmatrix}1&3&1\\3&-1&3\\1&3&1\end{pmatrix}X=0$$

$$\iff \begin{cases} x+3y+z=0 & \\ 3x-y+3z=0 & L_2\longleftarrow L_2-3L_1\\ x+3y+z=0 & L_3=L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+3y+z=0\\ -10y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+z=0\\ y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-z\\ y=0\end{cases}$$

$$\iff X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff X\in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_2=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}$$

$\underline{E_6=\operatorname{Ker}(6I_3-B)}$:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_6 \iff \begin{pmatrix}5&3&1\\3&3&3\\1&3&5\end{pmatrix}X=0$$

$$\iff \begin{cases} 5x+3y+z=0 & L_1\longleftarrow L_1-5L_3\\ 3x+3y+3z=0 & L_2\longleftarrow L_2-3L_3\\ x+3y+5z=0 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -12y-24z=0 & \\ -6y-12z=0 & L_2=2L_1\\ x+3y+5z=0 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+3y+5z=0\\ y+2z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-3y-5z=z\\ y=-2z\end{cases}$$

$$\iff X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\-2z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff X\in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_6=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}$$

On pouvait aussi remarquer que, vu les multiplicité, et comme $1\leqslant \dim E_\lambda \leqslant \alpha=1$, les sous-espace propre sont tous de dimension 1. Or, vu la première opération pour calculer le polynôme caractéristique,

$$B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\subset E_{-3}$*, avec égalité par égalité des dimensions.*

De plus, en essayant des vecteurs simples, $B\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$*. Donc, de même,* $E_2=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$*.*

La matrice B est symétrique réelle, donc ses sous-espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux. Ainsi, le troisième sous-espace propre est orthogonal aux deux précédent, et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ *en est une base.*

Vous cherchez une base orthonormée. Il faut donc vérifier *ortho*gonal et *normé*.
Déterminons une famille **orthonormée** de vecteurs propres :

- Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux, donc la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ est orthogonale.
  Si vous ne pensez pas spontanément à cette propriété, commencez par vérifier s'ils ne sont pas déjà orthogonaux ($\langle e_i, e_j\rangle$) avant de vous lancer dans un coûteux algorithme d'orthonormalisation.
- Il reste donc à normer les vecteurs trouvés précédemment.

$$\left\| \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\|^2 = 3 \qquad \left\| \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\|^2 = 2 \qquad \left\| \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\|^2 = 1+4+1 = 6$$

En conclusion, une base orthonormée de vecteurs propres est

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)}$$

c) Dans une base orthonormée,

$$\boxed{\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i^2}$$

De plus, $g(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i g(e_i) = -3x_1e_1 + 2x_2e_2 + 6x_3e_3$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\langle g(x), x\rangle &= \langle -3x_1e_1 + 2x_2e_2 + 6x_3e_3, x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\rangle \\ &= -3x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 \qquad \text{Car } \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}\end{aligned}$$

De même, par récurrence, pour $n \geqslant 1$ fixé, $g^n(x) = (-3)^n x_1e_1 + 2^n x_2e_2 + 6^n x_3e_3$ et

$$\boxed{\langle g^n(x), x\rangle = (-3)^n x_1^2 + 2^n x_2^2 + 6^n x_3^2}$$

d) Pour tout $n \geqslant 1$, $v_n(x) = (-3)^n x_1^2 + 2^n x_2^2 + 6^n x_3^2$.

- Si $x_3 \neq 0$,

$$v_n(x) \sim 6^n x_3^n$$

  donc $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = +\infty$. Par définition de la limite,

$$\forall A \geqslant 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \forall n \geqslant n_0,\ v_n(x) \geqslant A$$

  En prenant, par exemple, $A = 1$, nous venons de montrer que la suite $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
- Si $x_3 = 0$ et $x_2 \neq 0$, il vient

$$v_n(x) = (-3)^n x_1^2 + 2^n x_2^2 \sim 2^n x_3^n$$

  et un raisonnement identique nous donne un résultat identique.
- Si $x_2 = x_3 = 0$, comme $x \neq 0$, nécessairement $x_1 \neq 0$. Il vient

$$v_n(x) = (-3)^n x_1^2 \neq 0$$

  Donc la suite $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ n'est jamais nulle dans ce cas.

En conclusion,

$$\boxed{\text{Pour tout } x \neq 0, \text{ la suite } (v_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ est non nulle à partir d'un certain rang}}$$

e) Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x_3 \neq 0$.

$$\frac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)} = \frac{(-3)^n x_1^2 + 2^n x_2^2 + 6^n x_3^2}{(-3)^{n-1}x_1^2 + 2^{n-1}x_2^2 + 6^{n-1}x_3^2} \sim \frac{6^n x_3^2}{6^{n-1}x_3^2} = 6$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)} = 6}$$

2) **a)** *Nous sommes bien d'accord que « C diagonalisable dans $\mathscr{B}$ » signifie* $\mathrm{Mat}\,(h,\mathscr{B})$ *diagonale, et que cette dernière matrice se calcule via* $h(e_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}e_i$ *?* cf. *le rapport du jury.*

- $h(e_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix} = -3e_1$
- $h(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}C\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix} = -3e_2$
- $h(e_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}C\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+4-2\\-2-2-2\\-2+4+1\end{pmatrix} = 3e_3$

$$M = \begin{array}{ccc} h(e_1) & h(e_2) & h(e_3) \\ \end{array}$$
$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{La matrice } C \text{ est diagonalisable dans la même base orthonormée } (e_1, e_2, e_3)}$$

b) Soit $n \geqslant 1$. De même qu'au 1)c), $h^n(x) = (-3)^n x_1 e_1 + (-3)^n x_2 e_2 + 3^n x_3 e_3$, et le calcul dans la base orthonormée (e_1, e_2, e_3) nous donne

$$w_n(x) = (-3)^n x_1^2 + (-3)^n x_2^2 + 3^n x_3^2$$

Pour $x = e_1$ ou $x = e_2$ il vient $\forall i \in \{1, 2\}$ $w_n(e_i) = (-3)^n$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(e_1)}{w_{n-1}(e_1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(e_2)}{w_{n-1}(e_2)} = -3}$$

Pour $x = e_3$, $w_n(e_3) = 3^n$ et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(e_3)}{w_{n-1}(e_3)} = 3}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$. D'après le calcul effectué à la question 2b, pour tout $n \geqslant 1$,

$$w_n(x) = (-3)^n \left[x_1^2 + x_2^2 + (-1)^n x_3^2\right]$$

- Si $n = 2p$, $x_1^2 + x_2^2 + (-1)^n x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$: $w_{2p}(x) \neq 0$.
- Si $n = 2p+1$, $x_1^2 + x_2^2 + (-1)^n x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ si et seulement si $w_{2p+1}(x) = 0$.

Comme $x = 0 \in D$ vérifie $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, il vient

$$\boxed{D = \{x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \neq 0\}}$$

C'est un ouvert, complémentaire de $f^{-1}(\{0\})$ où $f : x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ polynomiale donc continue.

d) Soit $x_0 = e_1 + e_2 + e_3$. Alors $w_n(x_0) = (-3)^n(1+1+(-1)^n)$. Donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad w_{2p}(x_0) = (-3)^{2p} \times 3 = 3^{2p+1} \quad \text{et} \quad w_{2p+1}(x_0) = (-3)^{2p+1} \times 1 = -3^{2p+1}$$

Ainsi, avec $u_n = \dfrac{w_n(x_0)}{w_{n-1}(x_0)}$,

$$\begin{aligned} u_{2p} &= \frac{w_{2p}(x_0)}{w_{2p-1}(x_0)} = \frac{3^{2p+1}}{-3^{2p-1}} = -9 \\ u_{2p+1} &= \frac{w_{2p+1}(x_0)}{w_{2p}(x_0)} = \frac{-3^{2p+1}}{3^{2p+1}} = -1 \end{aligned}$$

Donc les deux sous-suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) ont des limites distinctes :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{w_n(x_0)}{w_{n-1}(x_0)}\right)_{n\geqslant 1} \text{ ne converge pas}}$$

e) D'après le calcul effectué à la question 2c,

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{w_n(x)}{w_{n-2}(x)} = \frac{(-3)^n\left[x_1^2 + x_2^2 + (-1)^n x_3^2\right]}{(-3)^{n-2}\left[x_1^2 + x_2^2 + (-1)^n x_3^2\right]} = 9$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(x)}{w_{n-2}(x)}} = 9$$

Partie II

1) Dans la base orthonormée de diagonalisation, les calculs sont identiques à ceux des questions I.1c et I.2b, et nous donnes, avec $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$,

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n x_i^2$$

Dans la suite de cette question, on suppose que $x_d = \langle x, e_d\rangle \neq 0$. De plus, $0 \leqslant |\lambda_{d-1}| < |\lambda_d|$ entraîne $\lambda_d \neq 0$.

$$u_n(x) = \lambda_d^n \left[\sum_{i=1}^{d-1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_d}\right)^n x_i^2 + x_d^2\right]$$

Or, pour tout $i \in [\![1, d-1]\!]$, $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_d}\right| \leqslant \left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_d}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_d}\right)^n = 0$ et, comme $x_d^2 \neq 0$,

$$u_n(x) \sim \lambda_d^n x_d^2$$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n(x)}{\lambda_d^n} = x_d^2 > 0$ entraîne $u_n(x) \neq 0$ à partir d'un certain rang : $x \in D$. En conclusion,

$$\boxed{\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \sim \lambda_d \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_d}$$

2) En reprenant le calcul précédent, il vient,

$$u_n(x) = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n x_i^2\right) + \lambda_d^n \sum_{i=k+1}^{d} x_i^2$$

Avec $K = \sum_{i=k+1}^{d} x_i^2 \geqslant x_d^2 > 0$. De même que ci-dessus,

$$u_n(x) \sim K\lambda_d^n$$

puis $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)}{\lambda_d^n} = K > 0$ entraîne $x \in D$. En conclusion,

$$\boxed{\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \sim \lambda_d \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_d}$$

3) Avec $x = e_{d-1} + 2e_d$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n(x) = \lambda_{d-1}^n + 4\lambda_d^n = \lambda_d^n\Big((-1)^n + 4\Big)$$

Donc, pour tout $p \geqslant 0$,

$$\frac{u_{2p}(x)}{u_{2p-1}(x)} = \frac{\lambda_d^{2p}(1+4)}{\lambda_d^{2p-1}(-1+4)} = \frac{5}{3}\lambda_d$$
$$\frac{u_{2p+1}(x)}{u_{2p}(x)} = \frac{\lambda_d^{2p+1}(-1+4)}{\lambda_d^{2p}(1+4)} = \frac{3}{5}\lambda_d$$

Comme $\lambda_d \neq 0$, les deux sous-suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) ont des limites distinctes :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right)_{n\geqslant 1} \text{ ne converge pas}}$$

Partie III

1) De même qu'à la partie II, $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i^2$ et $\langle f(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i^2$.
Si $x \in F_k^*$, alors $\langle x, x\rangle > 0$ et $x = x_k e_k + \cdots + x_d e_d$:

$$\begin{aligned}
\langle f(x), x\rangle &= \sum_{i=k}^{d} \lambda_i x_i^2 \\
&\geqslant \lambda_k \sum_{i=k}^{d} x_i^2 && \text{Car } x_i^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \geqslant k,\ \lambda_i \geqslant \lambda_k \\
&\geqslant \lambda_k \langle x, x\rangle && \text{D'après ci-dessus}
\end{aligned}$$

En divisant par $\langle x, x\rangle > 0$, il vient

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in F_k^*,\ \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geqslant \lambda_k}$$

2) *Ce genre d'égalité se prouve par double inégalité – sans oublier de parler de l'existence du minimum. Une des inégalité se prouve en montrant que la valeur est atteinte.*

D'après 1, $\left\{\dfrac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} \mid x \in F_k^*\right\}$ est minoré par λ_k, donc la borne inférieure existe et vérifie

$$\inf_{x\in F_k^*} \frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} \geqslant \lambda_k$$

De plus, $x = e_k \in F_k^*$ (non nul car vecteur de la base), et

$$\begin{aligned}\frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} &= \frac{\langle f(e_k),e_k\rangle}{\langle e_k,e_k\rangle}\\ &= \frac{\langle \lambda_k e_k,e_k\rangle}{1}\\ &= \lambda_k\end{aligned}$$

Donc, par construction de la borne inférieure,

$$\inf_{x\in F_k^*} \frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} \leqslant \lambda_k$$

Par double inégalité [1], $\inf\limits_{x\in F_k^*} \dfrac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \lambda_k$. Cette borne inférieure est atteinte pour $x = e_k$, donc c'est un minimum :

$$\boxed{\min_{x\in F_k^*} \frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \lambda_k}$$

3) *Même remarque : double inégalité.* Comme au 1, si $x \in E_k$, $x = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i$ et

$$\langle f(x),x\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \lambda_k \langle x,x\rangle$$

Ainsi la borne supérieure existe et

$$\sup_{x\in E_k^*} \frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} \leqslant \lambda_k$$

D'après ci-dessus, $\dfrac{\langle f(e_k),e_k\rangle}{\langle e_k,e_k\rangle} = \lambda_k$, donc, par définition de la borne supérieure,

$$\sup_{x\in E_k^*} \frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} \geqslant \lambda_k$$

Par double inégalité, $\sup\limits_{x\in E_k^*} \dfrac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \lambda_k$. Cette borne supérieure est atteinte pour $x = e_k$, donc c'est un maximum :

$$\boxed{\max_{x\in F_k^*} \frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \lambda_k}$$

4) **a)** $V + F_k \subset \mathbb{R}^d$ donc $\dim(V+F_k) \leqslant d$. Or

$$\dim(V+F_k) = \dim V + \dim F_k - \dim(V\cap F_k)$$

D'où

$$\dim(V\cap F_k) = k + d - k + 1 - \dim(V+F_k) \geqslant 1 > 0$$

Ainsi,

$$\boxed{V\cap F_k \neq \{0\}}$$

1. Analogue de la double inclusion.

b) $\dim V = k \geqslant 1$, donc V^* non vide et $\left\{ \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \mid x \in V^* \right\}$ est non vide, majorée par λ_d. Par conséquent sa borne supérieure existe et est finie.
Comme $V \cap F_k \neq 0$, on peut choisir $y \in (V \cap F_k)^*$: par définition de la borne supérieure,

$$\sup_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geqslant \frac{\langle f(y), y\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

Comme $y \in F_k^*$, par définition du minimum,

$$\frac{\langle f(y), y\rangle}{\langle y, y\rangle} \geqslant \min_{x \in F_k^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

Ce minimum vaut λ_k d'après la question 2, donc

$$\sup_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geqslant \lambda_k$$

Pour montrer que le sup est un max, il faut faire de la topologie : $\dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \langle f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right), \dfrac{x}{\|x\|}\rangle$ *donc on peut se restreindre aux vecteurs de norme 1 :*

$$\sup_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \sup_{u \in V^* \cap S(0,1)} \langle f(u), u\rangle$$

Où $S(0,1)$ est la sphère unité de rayon 1. Comme $0 \notin S(0,1)$, $V^* \cap S(0,1) = V \cap S(0,1)$.
V est un fermé (sous-espace vectoriel en dimension finie) et $S(0,1)$ aussi, donc $V \cap S(0,1)$ fermé comme intersection de fermés.
$S(0,1)$ bornée, donc $V \cap S(0,1)$ bornée.
La fonction $g : u \mapsto \langle f(u), u, =\rangle \sum_{i=1}^{d} \lambda_i u_i^2$ est polynomiale donc continue.
Ainsi g est continue sur le fermé borné $V \cap S(0,1)$: elle est bornée et atteint ses bornes. Le sup est donc un max.

c) La minoration du 4b est vraie pour tout $V \in \mathcal{V}_k$, donc la borne inférieure existe et

$$\inf_{V \in \mathcal{V}_k} \max_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geqslant \lambda_k$$

De plus, $\dim E_k = k$ donc $E_k \in \mathcal{V}_k$ et, par définition de la borne inférieure,

$$\inf_{V \in \mathcal{V}_k} \max_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leqslant \max_{x \in E_k^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k$$

La dernière égalité est donnée par la question 3.
Ainsi, par double inégalité, l'inf est atteint en E_k et donc un minimum, et

$$\boxed{\min_{V \in \mathcal{V}_k} \left[\max_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \right] = \lambda_k}$$

d) On suit la meme démarche que les questions 4a à 4c : en exercice.

5) **a)** Rappel : $(AB)^T = B^T A^T$. Ainsi,

$$A'^T = (Q^T A Q)^T = Q^T A^T Q^{TT} = A'$$

Donc

$$\boxed{A' \text{ est symétrique réelle}}$$

b) **i)** Comme $(e_1, \dots, e_d)$ est une base orthonormée,

$$\boxed{\langle x, y \rangle = X^T Y}$$

ii)

$$\begin{aligned}\langle q(x), q(y) \rangle &= (QX)^T (QY) \\ &= X^T Q^T Q Y && \text{Or } Q^T Q = I_{d-1} \\ &= X^T Y \\ &= \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

iii) Par linéarité de q, $q(E'_k) = \operatorname{Vect}(q(e'_1), \dots, q(e'_k))$. D'après ii, pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$, $\langle q(e'_i), q(e'_j) \rangle = \langle e'_i, e'_j \rangle$.
Or $(e'_1, \dots, e'_k)$ est une famille orthonormée, donc $(q(e'_1), \dots, q(e'_k))$ aussi. Ainsi, elle est libre :

$$\boxed{\dim q(E'_k) = \operatorname{rg}(q(e'_1), \dots, q(e'_k)) = k}$$