Épreuve de Mathématiques 8

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'utilisation d'effaceurs chimiques ou de « vernis » de masquage est interdite. Tous les textes sont obligatoirement écrits à l'encre bleue foncée ou noire. L'usage du crayon à papier est interdit. D'autres couleurs peuvent être utilisées pour améliorer la présentation. Il est interdit de coller, couper les copies et adjoindre des brouillons.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On étudie le processus de fonctionnement d'un appareil utilisé chaque jour dans une usine et susceptible de subir des pannes accidentelles. On fait les hypothèses suivantes :

- Le comportement de l'appareil au jour $n+1$ ne dépend que de son état au jour n et pas des jours précédents.
- Si l'appareil fonctionne le jour n, il a une probabilité α d'être en panne le jour $n+1$.
- Si l'appareil est en panne au jour n, il a une probabilité β d'être réparé et de fonctionner le jour $n+1$.
- On a $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$.
  Formellement, si l'on appelle X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si l'appareil fonctionne le jour n et 0 si l'appareil est en panne au jour n, on a :

$$P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \alpha,$$

$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = \beta.$$

1) On note $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

a) Calculer p_2 en fonction de p_1.

b) Plus généralement, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$p_{n+1} = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_n.$$

c) En déduire une expression de p_n en fonction de p_1.

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

2) On suppose dans cette question que $p_1 = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$.

a) Calculer la loi de X_2.

b) Calculer la loi du couple (X_1, X_2).

c) Calculer l'espérance et la variance de X_1 et de X_2.

d) Calculer la covariance entre X_1 et X_2.

e) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3) On suppose maintenant que l'appareil est en fonctionnement le premier jour. On note N le numéro du jour où cet appareil tombe en panne pour la première fois. Montrer que $N-1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

4) On considère Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.

a) Quelle est la loi de $Y_1 + Y_2$.

b) On pose $Z = \min(Y_1, Y_2)$. Calculer la fonction de répartition de Z. En déduire sa loi.

c) On pose $T = \max(Y_1, Y_2)$. Calculer la loi de T.

5) L'usine est équipée de deux appareils dont on suppose les comportements indépendants l'un de l'autre. On suppose que les deux appareils sont en fonctionnement le premier jour. Au bout de combien de jours en moyenne se produira la première panne ?

Exercice 2

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 2$) muni du produit scalaire usuel noté $< x, y >$ entre les vecteurs x et y. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$ sera noté 0.

Dans tout le problème, si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$, on note V^* l'ensemble $V \backslash \{0\}$.

Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$, pour tout entier $n \geqslant 1$, on note f^n la composée n-fois de l'application f :

$$f^n = \underbrace{f \circ f ... \circ f}_{\text{n foi}}.$$

Si A est une matrice de taille $n \times p$, on note A^T sa transposée.

Partie I

1) On considère la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B.

a) Justifier l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g est diagonale.

b) Déterminer une telle base en rangeant les valeurs propres par ordre croissant.
Dans la suite de cette partie, (e_1, e_2, e_3) désignera cette base.

c) Soit $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$. Exprimer en fonction de x_1, x_2, x_3 les quantités , $\langle x, x \rangle$, $\langle g(x), x \rangle$, puis $\langle g^n(x), x \rangle$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
Dans la suite de cette partie, on notera $v_n(x) = \langle g^n(x), x \rangle$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$.

d) Montrer que, pour tout $x \neq 0$, la suite $(v_n(x))_{n \geqslant 1}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

e) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x_3 \neq 0$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)}$

2) On considère maintenant la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à C.

a) Démontrer que C est diagonalisable dans la même base orthonormée (e_1, e_2, e_3).

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^3$, on pose $w_n(x) = \langle h^n(x), x\rangle$. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(e_1)}{w_{n-1}(e_1)} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(e_2)}{w_{n-1}(e_2)} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(e_3)}{w_{n-1}(e_3)}.$$

c) Déterminer l'ensemble D des vecteurs x de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la suite $(w_n(x))_{n\geqslant 1}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

d) Déterminer un vecteur $x_0 \in D$ pour lequel la suite $\left(\dfrac{w_n(x_0)}{w_{n-1}(x_0)}\right)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas.

e) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n(x)}{w_{n-2}(x)}$ pour tout $x \in D$.

Partie II

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ une matrice symétrique réelle d'ordre d et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ canoniquement associé à A. On note $\lambda_1, ..., \lambda_d$ les valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) de A et on note $(e_1, .., e_d)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés.
On suppose maintenant que les valeurs propres sont rangées dans l'ordre des valeurs absolues croissantes

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant ... \leqslant |\lambda_d|.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note $u_n(x) = \langle f^n(x), x\rangle$ et on note D l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ pour lesquels la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 1}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

1) On suppose que $|\lambda_{d-1}| < |\lambda_d|$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\langle x, e_d\rangle \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} = \lambda_d.$$

2) On suppose maintenant que

$$|\lambda_k| < |\lambda_d| \text{ et } \lambda_{k+1} = ... = \lambda_d \qquad (1)$$

pour un certain $k < d$. Montrer que la limite précédente est encore valable pour tout x tel que $\langle x, e_d\rangle \neq 0$.

3) On suppose maintenant que $\lambda_{d-1} = -\lambda_d \neq 0$. Montrer que l'on peut trouver un $x \in D$ tel que la suite $\left(\dfrac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas.

Partie III

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre d, non nulle, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ canoniquement associé à A. On note $\lambda_1, ..., \lambda_d$ les valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) de A que l'on suppose rangées par ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_d$$

et on note $(e_1, .., e_d)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés.
Pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, on note

$$E_k = \mathrm{Vect}(e_1, .., e_k) \text{ et } F_k = \mathrm{Vect}(e_k, .., e_d).$$

1) Montrer que pour tout $x \in F_k^*$, on a $\dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geqslant \lambda_k$.

2) Montrer que $\displaystyle\min_{x\in F_k^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k$.

3) Montrer que $\max_{x \in E_k^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_k$.

4) Pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant d$, on note $\mathcal{V}_k$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ de dimension k.

a) Montrer que si $V \in \mathcal{V}_k$, $V \cap F_k \neq \{0\}$.

b) En déduire que, si $V \in \mathcal{V}_k$, $\max_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} \geqslant \lambda_k$.

c) Montrer que $\min_{V \in \mathcal{V}_k} \left[\max_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}\right] = \lambda_k$.

d) Montrer que $\max_{V \in \mathcal{V}_{d-k+1}} \left[\min_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}\right] = \lambda_k$.

5) Soit Q une matrice de taille $d \times (d-1)$ telle que $Q^T Q = I_{d-1}$ et soit q l'application linéaire de $\mathbb{R}^{d-1}$ dans $\mathbb{R}^d$ canoniquement associée à Q. On pose alors $A' = Q^T.A.Q$ et f' l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{d-1}$ canoniquement associé à A'.

a) Montrer que A' est encore une matrice symétrique réelle. On note alors $\lambda'_1, ..., \lambda'_{d-1}$ ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité et rangées dans l'ordre croissant, et $(e'_1, .., e'_{d-1})$ une base orthonormée vecteurs propres associés.

b) Soit x, y deux vecteurs de $\mathbb{R}^{d-1}$ et X, Y les matrices colonnes de leurs coefficients dans la base canonique.

i) Rappeler l'expression de $\langle x, y\rangle$ en fonction de X et Y.

ii) Montrer que $\langle q(x), q(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

iii) On pose $E'_k = \mathrm{Vect}(e'_1, ..., e'_k)$. Calculer $\dim q(E'_k)$.

c) En appliquant le résultat de la question 3 à la matrice A', montrer que

$$\lambda'_k = \max_{z \in q(E'_k)^*} \frac{\langle f(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}.$$

d) Déduire de la question 4c que $\lambda'_k \geqslant \lambda_k$.

e) Montrer de façon similaire en utilisant maintenant la question 4d que $\lambda'_k \leqslant \lambda_{k+1}$.

FIN DE L'ÉPREUVE