Épreuve de Mathématiques 8

Correction

4

Exercice 1 (PT 2016)

1) $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Plus généralement, la loi de N est celle du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0,1[$: c'est une loi géométrique.

$$\boxed{N \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les valeurs possibles de X sachant $(N = n)$ sont $[\![0, n]\!]$.

On peut poser Y la variable aléatoire prenant la valeur de X sachant $N = n$. On vient de déterminer $Y(\Omega)$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. L'événement $(X = k)$ sachant $(N = n)$ est « obtenir k pile parmi n lancers de pile ou face », il suit donc une loi binomiale :

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } X \text{ sachant } (N = n) \text{ est une loi binomiale de paramètres } (n, p)}$$

Toujours commencer par décrire les événements, et s'il y a un « parmi », comme dans « k parmi n », ne serait-ce pas une loi binomiale : k succès parmi n essais.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(N = n, X = k) &= P(N = n)P_{(N=n)}(X = k) && \text{Formule des probabilités conditionnelles.}\\
&= p(1-p)^{n-1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} && \text{D'après les lois déterminées au 1}\\
&= \binom{n}{k}p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1}
\end{aligned}$$

Si $k > n$, $P(N = n, X = k) = 0$.

Loi du couple (N, X) :

$$\boxed{\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad P(N = n, X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k}p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \end{cases}}$$

3) *Toujours le même modèle : $X(\Omega)$, formule des probabilités totales.* $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(N = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'écrit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (X = k) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(X = k, N = n)$$

Puis, si $k \in \mathbb{N}$ est fixé,

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = k, N = n)$$

D'après 2), $P(X = k, N = n) = 0$ si $k > n$, mais il faut aussi maintenir $n \geqslant 1$: si on commence la somme à $n = k$, il faut écarter le cas $k = 0$.

Si $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X=k, N=n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1}(1-p)^{2n-k-1} && \text{D'après 2 : } n \geqslant 1 \text{ et } k \leqslant n. \\
&= p^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left[(1-p)^2\right]^{n-k} (1-p)^{k-1} \\
&= p^{k+1}(1-p)^{k-1} \frac{1}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} && \text{D'après l'énoncé avec } x=(1-p)^2 \in]-1,1[. \\
&= \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}
\end{aligned}$$

Si $k = 0$:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=0, N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p(1-p)^{2n-1} && \text{D'après 2 : } n \geqslant 1 \text{ et } k=0 \leqslant n. \\
&= p \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{2n+1} && \text{Les sommes, on les connaît en partant de 0} \\
&= p(1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(1-p)^2\right]^n \\
&= p(1-p) \frac{1}{1-(1-p)^2} && \text{Série géométrique, } x=(1-p)^2 \in]-1,1[. \\
&= \frac{1-p}{2-p}
\end{aligned}$$

Ainsi, la loi de X est donnée par

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ P(X=k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \qquad \text{et} \qquad P(X=0) = \frac{(1-p)}{(2-p)}.}$$

C'est le même exercice que les oeufs de batracien, mais au lieu de composer des lois de Poisson et binomiale, ici on compose des lois géométrique et binomiale.

4) **a)** Les variables U et V sont indépendantes, donc

$$E(UV) = E(U)E(V)$$

Or $E(U) = \lambda$ (loi de Bernoulli) et $E(V) = \dfrac{1}{\lambda}$ (loi géométrique). Ainsi,

$$\boxed{E(Y) = 1}$$

b) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Décrivons les événements $(Y = k)$:

- Pour $k = 0$, $(Y = 0) = (U = 0)$, car $V \neq 0$.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(Y = k) = (U = 1) \cap (V = k)$, car $U(\Omega) = \{0, 1\}$.

Si on veut procéder de façon systématique, on peut considérer les 2 systèmes complets d'événements qui s'offrent à nous : $(U = i)_{i\in\{0,1\}}$ et $(V = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Le plus simple est clairement le premier. Et $(Y = k)\cap(U = i)$ se simplifie immédiatement.

Par conséquent,

- Pour $k=0$, $P(Y=0)=P(U=0)=1-\lambda$.
- Pour $k \geqslant 1$, $P(Y=k)=P(U=1)P(V=k)$ Car U et V sont indépendantes

$$= \lambda\lambda(1-\lambda)^{k-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(Y=0)=1-\lambda \\ P(Y=k)=\lambda^2(1-\lambda)^{k-1} \quad \text{si } k \geqslant 1 \end{array}}$$

c) La formule de König-Huygens s'écrit $V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$. Le théorème du transfert nous dit

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y^2 P(Y=y) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(Y=k) && \text{Car } k^2P(Y=k)=0 \text{ si } k=0 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \lambda^2 (1-\lambda)^{k-1} \end{aligned}$$

On reconnaît un bout de dérivation (kx^{k-1}) et de la série géométrique. On bricole au brouillon, et on revient au propre avec un beau calcul bien net.

La série géométrique a pour rayon de convergence 1 :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

Or par dérivation terme à terme de cette série entière à l'intérieur du domaine de convergence, on obtient successivement

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$$

Ainsi,

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1}$$

En remplaçant dans $E(Y^2)$ il vient

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \lambda^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1-\lambda)^{k-1} && \text{avec } 1-\lambda \in]-1,1[\\ &= \frac{\lambda^2(1+1-\lambda)}{\lambda^3} \\ &= \frac{2-\lambda}{\lambda} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{V(Y) = \frac{2-\lambda}{\lambda} - 1 = \frac{2-2\lambda}{\lambda}}$$

On peut aussi, plus simplement, utiliser le même argument qu'au 4a : $E(Y^2)=E(U^2V^2)=E(U^2)E(V^2)$ par indépendance de U et V. Or $V(V)=E(V^2)-E(V)^2$ est connue, d'où $E(V^2)=....$ De même pour $E(U^2)$, ou par un calcul direct.

5) Déterminons λ à l'aide de $P(X=0)$:

$$\frac{1-p}{2-p} = 1-\lambda \iff \lambda = \frac{1}{2-p}$$

Donc en posant $\boxed{\lambda = \frac{1}{2-p}}$ et donc $1-\lambda = \frac{1-p}{2-p}$, X a pour loi d'après 3)

$$\forall k \geqslant 1,\ P(X=k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} = \lambda^2(1-\lambda)^{k-1} \qquad \text{et} \qquad P(X=0) = \frac{1-p}{2-p} = 1-\lambda$$

D'après 4)b), X a même loi que $Y = UV$, c'est-à-dire

$$\boxed{X \text{ a même loi qu'un produit de variables aléatoires indépendantes } UV \text{ où } U \hookrightarrow \mathscr{B}(\lambda) \text{ et } V \hookrightarrow \mathscr{G}(\lambda)}$$

Exercice 2 (Mines-Ponts PC 2017)

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $S_k(\Omega) = [\![1,5]\!]$, $(S_k = i)_{i \in [\![1,5]\!]}$ forme un système complet d'événements. La formule des probabilités totales nous donne alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{k+1}=1) &= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}\Big((S_{k+1}=1) \cap (S_k = i)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1}=1 | S_k = i)\mathbb{P}(S_k=i) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=2}^{5} \mathbb{P}(S_k=i)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{k+1}=1) = \frac{1}{3}\sum_{i=2}^{5} \mathbb{P}(S_k=i)}$$

2) La formule des probabilités totales appliquée aux évènements $(S_{k+1}=i)$ à l'aide du système complet d'événements $(S_k=j)_{j\in[\![1,5]\!]}$ s'écrit

$$\forall i \in [\![1,5]\!], \qquad \mathbb{P}(S_{k+1}=i) = \sum_{j=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1}=i|S_k=j)\mathbb{P}(S_k=j)$$

Matriciellement, il vient

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_{k+1}=1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(S_{k+1}=5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S_{k+1}=1|S_k=1) & \cdots & P(S_{k+1}=1|S_k=5) \\ \vdots & & \vdots \\ P(S_{k+1}=5|S_k=1) & \cdots & P(S_{k+1}=5|S_k=5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_k=1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(S_k=5) \end{pmatrix} = BX_k$$

Avec la matrice $B = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![1,5]\!]^2}$ où $b_{ij} = \mathbb{P}(S_{k+1}=i|S_k=j)$.
Donc, pour $i=2$, puis 3 etc...

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{k+1}=2) &= \sum_{j=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1}=2|S_k=j)\mathbb{P}(S_k=j) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k=1) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(S_k=3)+\mathbb{P}(S_k=5)) \\
\mathbb{P}(S_{k+1}=3) &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k=1) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(S_k=2)+\mathbb{P}(S_k=4)) \\
\mathbb{P}(S_{k+1}=4) &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k=1) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(S_k=3)+\mathbb{P}(S_k=5)) \\
\mathbb{P}(S_{k+1}=5) &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k=1) + \frac{1}{3}(\mathbb{P}(S_k=2)+\mathbb{P}(S_k=4))
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}}$$

3) Pour tout $j \in [\![1, 5]\!]$, $\sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = i | S_k = j) = P(\Omega | S_k = j) = 1$, donc

$$^t B \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = i | S_k = 1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = i | S_k = 5) \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ est un vecteur propre de } {}^t B\text{, et 1 est la valeur propre associée.}}$$

4) Montrons que $X_0 \in E_1(B)$:

$$BX_0 = \begin{pmatrix} 0 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 \\ 1/16 + 0 + 1/16 + 0 + 1/16 \\ 1/16 + 1/16 + 0 + 1/16 + 0 \\ 1/16 + 0 + 1/16 + 0 + 1/16 \\ 1/16 + 1/16 + 0 + 1/16 + 0 \end{pmatrix} = X_0$$

Comme $X_{k+1} = BX_k$ entraîne $X_k = B^k X_0$, il vient, par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad X_k = B^k X_0 = X_0$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{Les } S_k \text{ ont toute la loi de } S_0}$$

5) *Quand il y a des zéros – dans les lois conditionnelles et donc dans les lois de couples – il est peu probable que les variable aléatoire discrète soient indépendantes.*

$\mathbb{P}(S_0 = 2 \cap S_1 = 4) = 0 \neq \mathbb{P}(S_0 = 2) \times \mathbb{P}(S_1 = 4)$. Ainsi,

$$\boxed{S_0 \text{ et } S_1 \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

Exercice 3 (Autour du paradoxe de Penney)

Partie 1 (Le match nul)

1) Étude de la variable aléatoire discrète T.

a) $\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

b) L'évènement $(T = 1)$ est « le premier paquet est FPP » :

$$\boxed{(T = 1) = (X_1 = F, X_2 = P, X_3 = P)}$$

Comme les $(X_k)_k$ sont mutuellement indépendantes,

$$\boxed{\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(X_1 = F)\mathbb{P}(X_2 = P)\mathbb{P}(X_3 = P) = qp^2}$$

c) La variable aléatoire T suit une loi géométrique :
Notons Y_n la variable aléatoire discrète qui vaut 1 quand $(X_{3n+1}, X_{3n+2}, X_{3n+3}) = (F, P, P)$ et 0 sinon. Les $(Y_n)_n$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre qp^2, et sont mutuellement indépendantes (car elles dépendent de X_k différents). La variable aléatoire discrète T est le temps du premier succès. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(Y_1 = 0) \dots \mathbb{P}(Y_{n-1} = 0)\mathbb{P}(Y_n = 1) = (1 - qp^2)^{n-1}qp^2}$$

d) Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{1 - (1 - qp)} qp^2 = 1$,

$$\boxed{\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - \mathbb{P}(T \in \mathbb{N}^*) = 0}$$

e) Par conséquent,

$$\boxed{T \text{ suit une loi géométrique de paramètre } qp^2\text{, et } E(T) = \frac{1}{qp^2}}$$

2) Si le motif « FPP » n'apparaît jamais (H), a fortiori il n'apparaît jamais dans un paquet $(X_{3n+1}, X_{3n+2}, X_{3n+3})$.

$$\boxed{H \subset (T = +\infty)}$$

3) Par croissance, $\mathbb{P}(H) \leqslant \mathbb{P}(T = +\infty) = 0$: $\mathbb{P}(H) = 0$.

$$\boxed{\text{le jeu se termine presque sûrement}}$$

Le paradoxe du singe : un singe devant une machine à écrire finira par écrire tout ce qui a jamais été écrit jusqu'ici (tout motif fini par apparaître). Mais le temps moyen d'apparition est évidemment très très élevé.

Partie 2 (Premier motif apparu)

1) Les motifs étant de longueur 3, aucun joueur ne peut avoir gagné la partie avant 3 lancers :

$$\boxed{\forall n \in \{1, 2\}, \quad \mathbb{P}(E_n) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n) = 0}$$

2) Cas $n = 3$.

a) C'est l'évènement $\boxed{A_3 = (X_1 = P) \cap (X_2 = P) \cap (X_3 = F)}$

b) Par indépendance mutuelle des $(X_k)_k$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(X_1 = P)\mathbb{P}(X_2 = P)\mathbb{P}(X_3 = F) = p^2q}$$

c) De même, $B_3 = (X_1 = F) \cap (X_2 = P) \cap (X_3 = P)$ et

$$\boxed{\mathbb{P}(B_3) = \mathbb{P}(X_1 = F)\mathbb{P}(X_2 = P)\mathbb{P}(X_3 = P) = p^2q}$$

Et, comme $E_3 = \overline{A_3 \cup B_3}$, où A_3 et B_3 sont disjoints,

$$\boxed{\mathbb{P}(E_3) = 1 - \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(B_3) = 1 - 2p^2q}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 3$.

a) Auguste vient de gagner la partie, donc le motif « PP » vient d'apparaître.
Supposons que la pièce soit tombée sur « F » à un moment :

$$\{k \in [\![1, n]\!] \,|\, X_k = F\} \neq \emptyset$$

On prend le plus grand indice m de cet ensemble : $X_m = F$ et $X_{m+1} = X_{m+2} = P$ par construction $(m \leqslant n - 1)$. Donc Bérengère a gagné, ce qui est absurde.
Conclusion : par l'absurde,

$$\boxed{\text{Lors des } n-1 \text{ premiers lancers, la pièce n'est jamais tombée sur « face »}}$$

b) Par conséquent, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$A_n = (X_1 = \cdots = X_{n-1} = P) \cap (X_n = F)$$

Par indépendance mutuelle des $(X_k)_k$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = p^{n-1}q}$$

4) **a)** $\boxed{G_A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n}$

b) L'union est disjointe, donc, par propriété d'une probabilité,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} p^{n-1}q && \text{Car } \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 0 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p^{n+2}q \\
&= p^2
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{P}(G_A) = p^2}$$

c) On a l'union disjointe suivante : $\Omega = G_A \cup G_B \cup H$. Or d'après 1.3, $\mathbb{P}(H) = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{P}(G_B) = 1 - P(G_A) = 1 - p^2}$$

d) Pour $p = q = 1/2$,

$$\boxed{\mathbb{P}(G_A) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(G_B) = \frac{3}{4}}$$

e) Le jeu est équitable si $\mathbb{P}(G_A) = \mathbb{P}(G_B)$, c'est-à-dire $p^2 = 1 - p^2$. Comme $p \geqslant 0$, on trouve que

$$\boxed{\text{Le jeu est équitable si } p = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Partie 3 (Temps moyen d'attente)

1) De même qu'en 1.2, si le motif n'apparaît jamais, a fortiori il n'apparaît jamais dans un paquet de rang $3n$, donc

$$\boxed{(T_A = +\infty) \subset (T = +\infty)}$$

Par croissance, $\mathbb{P}(T_A = +\infty) \leqslant \mathbb{P}(T = +\infty) = 0$, donc $\mathbb{P}(T_A = +\infty) = 0$.

2) Comme on ignore la valeur $+\infty$ (de probabilité nulle),

$$\boxed{T_A(\Omega) = \mathbb{N}^*}$$

On peut aussi considérer que $T_A(\Omega) = [\![3, +\infty[\![$.

De même qu'au 2.1, le motif est de longueur 3, donc ne peut pas apparaître avant le 3e lancé.

$$\boxed{\mathbb{P}(T_A = 1) = \mathbb{P}(T_A = 2) = 0}$$

Au 3e lancer, $(T_A = 3) = (X_1 = P) \cap (X_2 = P) \cap (X_3 = F)$: par indépendance mutuelle,

$$\boxed{\mathbb{P}(T_A = 3) = p^2q}$$

3) Le système complet d'événements $\Big((X_n = P), (X_n = F)\Big)$ nous donne

$$\boxed{\mathbb{P}(T_A > n) = \mathbb{P}\Big((T_A > n) \cap (X_n = F)\Big) + \mathbb{P}\Big((T_A > n) \cap (X_n = P)\Big) = v_n + w_n}$$

4) Comme $(T_A = 1) = (T_A = 2) = \emptyset$, $(T_A > 1) \cap (X_1 = x) = (X_1 = x)$ pour $x \in \{P, F\}$, et de même pour $n = 2$:

$$\boxed{v_1 = v_2 = q \quad \text{et} \quad w_1 = w_2 = p}$$

5) Soit $n > 3$.

a) L'évènement $(T_A > n-3)$ ne dépend que de $(X_1, \dots, X_{n-3})$, donc est indépendant d'évènements décrits à l'aide de X_k pour $k > n-3$, car les $(X_k)_k$ sont mutuellement indépendantes.

b) Si $X_n = F$ et que le motif n'apparaît pas en n (ou avant), il y 3 possibilités :

- $\underline{X_{n-1} = F}$: Le motif n'est pas apparu jusqu'en $n-1$ inclus : $X_n = F$ ne peut pas provoquer une apparition du motif. Ainsi,

$$(T_A > n) \cap (X_{n-1} = F) \cap (X_n = F) = (T_A > n-1) \cap (X_{n-1} = F) \cap (X_n = F)$$

- $\underline{X_{n-1} = P \text{ et } X_{n-2} = F}$: Le motif n'est pas apparu jusqu'en $n-2$ inclus : la séquence $X_{n-1} = P$, $X_n = F$ ne peut pas provoquer une apparition du motif. Ainsi,

$$\begin{aligned}&(T_A > n) \cap (X_{n-2} = F) \cap (X_{n-1} = P) \cap (X_n = F)\\ =&(T_A > n-2) \cap (X_{n-2} = F) \cap (X_{n-1} = P) \cap (X_n = F)\end{aligned}$$

- $\underline{X_{n-1} = P \text{ et } X_{n-2} = P}$, mais dans ce cas le motif vient d'apparaître, donc cette possibilité est exclue.

En résumé, nous avons l'union disjointe suivante :

$$\begin{aligned}(T_A > n) \cap (X_n = F) = &\Big[(T_A > n-1) \cap (X_{n-1} = F) \cap (X_n = F)\Big]\\ &\cup \Big[(T_A > n-2) \cap (X_{n-2} = F) \cap (X_{n-1} = P) \cap (X_n = F)\Big]\end{aligned}$$

En passant aux probabilités, et en utilisant l'indépendance montrée au 5.a,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big((T_A > n) \cap (X_n = F)\Big) &= \mathbb{P}\Big[(T_A > n-1) \cap (X_{n-1} = F) \cap (X_n = F)\Big]\\ &\qquad + \mathbb{P}\Big[(T_A > n-2) \cap (X_{n-2} = F) \cap (X_{n-1} = P) \cap (X_n = F)\Big]\\ &= \mathbb{P}\Big[(T_A > n-1) \cap (X_{n-1} = F)\Big]\mathbb{P}(X_n = F)\\ &\qquad + \mathbb{P}\Big[(T_A > n-2) \cap (X_{n-2} = F)\Big]\mathbb{P}(X_{n-1} = P)\mathbb{P}(X_n = F)\\ &= qv_{n-1} + pqv_{n-2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}}$$

c) Comme $X_n = P$ ne peut pas faire apparaître le motif,

$$(T_A > n) \cap (X_n = P) = (T_A > n-1) \cap (X_n = P)$$

Puis, en passant aux probabilités,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big[(T_A > n) \cap (X_n = P)\Big] &= \mathbb{P}(T_A > n-1)\mathbb{P}(X_n = P) && \text{D'après 5.a, par indépendance}\\ &= p(v_{n-1} + w_{n-1}) && \text{D'après 3}\end{aligned}$$

Par conséquent, *(coquille dans l'énoncé, j'espère que personne n'a été bloqué par celle-ci trop longtemps)*

$$\boxed{w_n = pw_{n-1} + pv_{n-1}}$$

6) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(T_A = n)$ en fonction de v_n, pour $n \geqslant 3$.

7) Désormais, pour le reste de cette partie, $p = q = \dfrac{1}{2}$. Déterminer la loi de T_A.

8) La variable T_A admet-elle une espérance ? Si oui, la déterminer.

9) Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la partie 1 ?

10) Déterminer, en suivant une méthode analogue, la loi du temps d'attente T_B du motif FPP. Montrez par le calcul que $E(T_B) = E(T_A)$, commentez.

Partie 4 (Pierre-papier-ciseaux)

On devait supposer (pour que les temps d'attentes similaires) $p = q = \dfrac{1}{2}$.

1) Cas FFP contre PFF : dans cette question, Auguste choisit FFP et Bérengère PFF.
En posant $P' = F$ et $F' = P$, montrer que l'on peut déduire d'une question qui précède les probabilités $\mathbb{P}(G_A)$ et $\mathbb{P}(G_B)$.

2) Cas PFF contre PPF : dans cette question, Auguste choisit PFF et Bérengère PPF. En utilisant le système complet d'événements donné par le couple (X_1, X_2), Déterminez $\mathbb{P}(G_A)$ et $\mathbb{P}(G_B)$.

3) Étudiez le cas FPP contre FFP.

FIN DE L'ÉPREUVE