

Épreuve de Mathématiques 8

Correction

Exercice 1 (E3A PC 2018)

On admet l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout entier naturel non nul n, $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On introduit les séries entières :

$$H(x) = \sum_{n \geqslant 1} h_n x^n, \quad S(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} x^n \quad \text{et} \quad T(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{h_n}{n} x^n.$$

On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série H.

1)

$$\begin{aligned} h_{2n} - h_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} && \text{Car } k \leqslant 2n \\ &\geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}}$$

2) Supposons que (h_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, par linéarité de la limite,

$$\lim_{n \to +\infty} h_{2n} - h_n = \ell - \ell = 0$$

Or, d'après 1), $\forall n > 0$, $h_{2n} - h_n \geqslant 1/2 > 0$.
C'est absurde. Donc (h_n) diverge.
Or, pour tout $n > 0$, $h_{n+1} - h_n = \frac{1}{n+1} > 0$, donc (h_n) est croissante. Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (h_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ diverge vers } +\infty}$$

3) *Considérer u_{n+1}/u_n ne semble pas être l'avenir. Inspirons nous donc de l'autre question de cours, $\sum c_n z^n$.*
Soit R le rayon de convergence de la série H. En encadrant les $1/k$ entre 0 et 1, il vient

$$\forall n > 0, \qquad 1 = h_1 \leqslant h_n \leqslant n$$

Or $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1. Donc, par minoration, $R \leqslant 1$.
Et $\sum n x^n$ a même rayon de convergence que $\sum x^n$ (cours), donc 1. Ainsi, par majoration, $R \geqslant 1$.
Conclusion :

$$\boxed{R = 1 \quad \text{et} \quad I =]-1, 1[}$$

4) Rayon R_S de S : Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n = \dfrac{x^n}{n^2}$.

$$\forall x \neq 0, \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2}|x| \sim \frac{n^2}{n^2}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$$

Donc, d'après D'Alembert, si $|x| < 1$, $\sum u_n$ converge absolument donc converge ;
si $|x| > 1$, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement donc $\sum u_n$ diverge.

Conclusion : $\boxed{R_S = 1}$

Rayon R_T de T : En reprenant l'encadrement de (h_n), il vient

$$\forall n > 0, \qquad \frac{1}{n} \leqslant \frac{h_n}{n} \leqslant 1$$

Ainsi, la seconde inégalité donne $R_T \geqslant 1$.
De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$\left|\frac{x^{n+1}n}{(n+1)x^n}\right| \sim \frac{n}{n}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$$

Donc, de même que pour R_S, d'après D'Alembert, le rayon de $\sum \frac{1}{n}x^n$ est 1.
Conclusion : par encadrement,

$$\boxed{R_T = 1}$$

5) $R = 1$ et

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}$$

6) La série géométrique nous donne

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Donc G est développable en série entière comme produit de fonctions développable en série entière, de rayon $R \geqslant 1$, et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad G(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

où (c_n) est donné par le produit de Cauchy :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \text{où } a_k = -\frac{1}{k} \text{ si } k > 0,\ a_0 = 0 \text{ et } b_k = 1$$
$$= \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{k}$$
$$= -h_n$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est développable en série entière sur }]-1,1[, \text{ et } G = -H}$$

7) D'après 6, pour tout $x \in]-1,1[$, $H(x) = -G(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$

Par définition, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} L(x) &= \int_0^x H(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}\big(\ln(1-t)\big)^2\right]_0^x && \text{car } (u^2)' = 2u'u \text{ et } \big(\ln(1-t)\big)' = -\frac{1}{1-t} \\ &= \frac{1}{2}\big(\ln(1-x)\big)^2 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad L(x) = \frac{1}{2}\big(\ln(1-x)\big)^2}$$

8) Le théorème d'intégration terme à terme d'une série entière nous dit que, si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R et de somme f, alors $\sum \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ est aussi de rayon de convergence R et

$$\forall x \in]-R,R[, \qquad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

La fonction H est développable en série entière d'après la question 3, donc par intégration terme à terme, la primitive L de H est aussi développable en série entière, et

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad L(x) = \int_0^x H(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n+1}x^{n+1}}$$

9) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{h_n}{n} - \frac{1}{n^2} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{kn} \\ &= \frac{h_{n-1}}{n} && \text{en posant } h_0 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} T(x) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{h_n}{n} - \frac{1}{n^2}\right) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{h_n}{n} - \frac{1}{n^2}\right) x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h_{n-1}}{n} x^n && \text{Car } h_0 = 0 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n+1} x^{n+1} \\ &= L(x) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{T - S = L \text{ sur } I}$$

10) **a)** La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est définie et continue sur $]0,y]$ (car $1-t>0$).

De plus, elle est prolongeable par continuité en 0 : $\dfrac{\ln(1-t)}{t} \sim -\dfrac{t}{t} = -1$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est faussement généralisée en 0. Ainsi,

$$\boxed{\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u \text{ est une intégrale convergente}}$$

Pour tout $u \in]-1,1[$, $\ln(1-u) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{n+1}}{n+1}$ donc

$$\forall u \in]0,1[, \quad \ln(1-u) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n+1}$$

En remplaçant dans l'intégrale, il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u &= \int_0^y -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n+1}\,\mathrm{d}u \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^y \frac{u^n}{n+1}\,\mathrm{d}u && \text{Par intégration terme à terme à l'intérieur du domaine de convergence : } [0,y] \subset]-1,1[. \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n n+1}{(n+1)^2} \\
&= -S(y) && \text{par réindexation}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u + S(y) = 0}$$

b) La fonction $f : u \mapsto \dfrac{\ln(1-u)}{u}$ est définie et continue sur $]0,1[$, et l'étude en 0 a déjà été faite à la question 10a.

<u>Étude en 1</u> : posons $u = 1-t$.

$$\begin{aligned}
f(u) &= f(1-t) \\
&= \frac{\ln t}{1-t} \\
&\sim \ln t
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge (primitive $t\ln t - t$, qui a une limite finie en 0 par croissance comparée).

Donc, par comparaison, $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(u)\,\mathrm{d}u$ converge absolument donc converge.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u \text{ est une intégrale convergente}}$$

D'après 10a,

$$\forall y \in]0,1[, \qquad \int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = -S(y) \tag{1}$$

D'après ci-dessus, $y \mapsto \displaystyle\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$ admet une limite finie en $y = 1$.

<u>Étude au bord de S</u> : Soit $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$.

On a $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2}$, donc d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$), $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.
Ainsi, $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[0, 1]$.
Donc, par théorème de continuité des séries de fonctions, $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} x^n$ est définie et continue sur $[0, 1]$. En particulier,

$$\lim_{y\to 1} S(y) = S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Par conséquent, on peut prendre la limite lorsque $y \to 1$ dans l'équation 1 :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = -S(1) = -\frac{\pi^2}{6}}$$

c) D'après ci-dessus,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6} &= -\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_y^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u && \text{Chasles} \\
&= S(y) - \int_y^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

<u>Effectuons le changement de variable $u = 1 - t$</u> :
$\varphi : t \mapsto 1 - t$ est une bijection strictement décroissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $[y, 1[$ dans $]0, 1 - y[$, donc, d'après le théorème de changement de variable, $\int_y^1 \dfrac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\int_0^{1-y} \dfrac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature – convergente d'après 10a. Et

$$\int_y^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{1-y} \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

<u>Effectuons une intégration par partie</u> :
Posons $\begin{cases} u = \ln t & u' = \dfrac{1}{t} \\ v = -\ln(1-t) & v' = \dfrac{1}{1-t} \end{cases}$ Comme $uv \sim_0 t\ln t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ par croissance comparée, et que uv a une limite finie en $1 - y$, les hypothèses du théorème d'intégration par partie sont vérifiées : les limites de uv aux bornes 0 et $1 - y$ existent et sont finies. Comme $\int_0^{1-y} \dfrac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge, $\int_0^{1-y} -\dfrac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ aussi et

$$\int_0^{1-y} \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = [-\ln(1-t)\ln(t)]_0^{1-y} + \int_0^{1-y} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad = -\ln(1-y)\ln(y) - S(1-y) \text{D'après 10a}$$

En conclusion,

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y)}$$

11) D'après 9, $T = S + L$ sur I, et comme $1/2 \in I$,

$$T(1/2) = S(1/2) + L(1/2)$$

Pour $y = 1/2 \in]0, 1[$, l'égalité précédente nous donne

$$S(1/2) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

Et la question 7 nous donne $L(1/2) = \dfrac{1}{2}(\ln 2)^2$. En conclusion,

$$\boxed{T(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12}}$$

Exercice 2 (D'après CCINP TSI)

Partie 1 (Étude d'une équation différentielle)

1) Soit $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ est continue, donc continue par morceaux, et positive sur $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: Par croissance comparée, comme $1/x > 0$,

$$t^2 f(t) \sim t e^{-t/x} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$).

Donc, par comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Conclusion :

$$\boxed{\varphi(x) \text{ existe pour tout } x > 0}$$

2) Intégrabilité de ψ : Posons

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad \psi(t) = \frac{te^{-t/b}}{a^2(1+t)}$$

La fonction ψ est continue sur $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: De même qu'au 1, par croissance comparée, comme $1/b > 0$,

$$t^2\psi(t) \sim t^2 e^{-t/b} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc $\psi(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$).

Donc, par comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument, car $\psi \geqslant 0$).

Majorations : Soit $t \in [0, +\infty[$. Pour tout $x \in [a, b]$,

$$0 < a \leqslant x \Longrightarrow \frac{t}{x^2} \leqslant \frac{t}{a^2}$$

Et

$$0 < x \leqslant b \Longrightarrow \frac{t}{b} \leqslant \frac{t}{x} \Longrightarrow e^{-\frac{t}{x}} \leqslant e^{-\frac{t}{b}}$$

En conclusion,

$$0 \leqslant \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)} \leqslant \frac{te^{-t/b}}{a^2(1+t)} = \psi(t)$$

Quand la majoration n'est pas immédiate, il faut justifier (au moins 1 étape intermédiaire), et il vaut mieux déplacer les calculs en « préliminaires ».

Théorème de dérivation : Posons

$$\forall (t, x) \in [0, +\infty[\times[a, b], \qquad h(x, t) = \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$$

Avoir une dérivée partielle juste est fondamental. Prenez votre temps, décomposez, mais la dérivée doit être juste. On dérive par rapport à x. $e^{-\frac{t}{x}} = e^u$, $(e^u)' = u'e^u$. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{t}{x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(tx^{-1}) = -tx^{-2}$. Etc.

- $\forall t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et

$$\forall x \in [a,b], \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)}$$

- $\forall x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (d'après 1)) ;
  la fonction $t \mapsto \dfrac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- La fonction $\psi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie ci-dessus est **intégrable sur** $[0,+\infty[$ d'après ci-dessus et, toujours d'après les calculs ci-dessus,

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times[0,+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{\varphi \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,b] \text{ et } \varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)}\,\mathrm{d}t.}$$

3) La fonction φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ pour tout a, b tels que $0<a<b$, donc φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\bigcup_{0<a<b}[a,b]=]0,+\infty[$:

$$\boxed{\varphi \text{ est classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$$

On vous donne l'équation différentielle, vous avez y et y' : vérifiez si en remplaçant – tout bêtement – le résultat tombe. Au pire, vous aurez des idées pour une éventuelle intégration par partie.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
x^2\varphi'(x)+\varphi(x) &= x^2\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t/x}}{x^2(1+t)}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\frac{t}{x}}}{1+t} + \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{-1/x}\right]_0^{+\infty} \\
&= x
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est solution sur }]0,+\infty[\text{ de l'équation différentielle } (\mathscr{E})}$$

4) **a)** Par dérivation terme à terme à l'intérieur du domaine de convergence, F est $\mathscr{C}^1$ sur $]-R,R[$ et

$$\forall x \in]-R,R[, \qquad F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1}$$

En remplaçant dans $(\mathscr{E})$, il vient

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-R,R[, \qquad x^2F'(x)+F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[(n-1)a_{n-1}+a_n\Big]x^n
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F \text{ solution de } (\mathscr{E}) \text{ sur }]-R,R[\iff \forall x \in]-R,R[, \quad a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[(n-1)a_{n-1} + a_n\Big] x^n = x$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ 0 + a_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, \quad (n-1)a_{n-1} + a_n = 0 \end{cases}$$

Par unicité du développement en série entière. Conclusion :

$$\boxed{a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ a_n = -(n-1)a_{n-1}}$$

b) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad a_n = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: est vraie d'après a).
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. $a_{n+1} = -na_n = (-1)^{n+2}n!$ d'après a) $(n+1 \geqslant 2)$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion :

$$\boxed{a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ a_n = (-1)^{n+1}(n-1)!}$$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n = a_n x^n = (-1)^{n+1}(n-1)!x^n$.

$$\forall x \neq 0, \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+2}n!x^{n+1}}{(-1)^{n+1}(n-1)!x^n}\right| = n|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty > 1$$

Donc, d'après d'Alembert, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement, donc $\sum u_n$ diverge.

Ainsi, $\boxed{R = 0}$

Vu le coefficient, ce n'est pas étonnant. Cf. l'exercice 1 de la feuille sur les séries entières.

En conclusion

L'équation $(\mathscr{E})$ n'admet pas de solution développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$, quel que soit $R > 0$.

Partie 2 (Détermination d'une valeur approchée de $\varphi(x)$)
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$. Somme des termes d'une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}$$

Par conséquent, en multipliant par $e^{-\frac{t}{x}}$,

$$\boxed{\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}}$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions $t \mapsto t^k e^{-\frac{t}{x}}$ et $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et par croissance comparée,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{k+2}e^{-\frac{t}{x}} = 0 \qquad \text{et} \qquad t^2\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \sim \frac{t^{n+3}e^{-\frac{t}{x}}}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc ces deux fonctions sont des petits o de $1/t^2$ en $+\infty$, or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison elles sont intégrables au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ existent}}$

Nous pouvons donc intégrer l'égalité obtenue au 1). La somme est *finie* donc par linéarité

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

3) a) $I_0(x) = \left[\dfrac{e^{-t/x}}{-1/x}\right]_0^{+\infty} = x.$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par partie. Soit $u = \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ et $v = e^{-t/x}$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} uv = 0$ par croissance comparée, on peut écrire

$$I_k(x) = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1}(-1/x)e^{-t/x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x(k+1)} I_{k+1}(x)$$

Conclusion : $\boxed{I_{k+1}(x) = (k+1)xI_k(x)}$

c) *La relation de récurrence est quasiment la même qu'en partie 1, question 4a. Et pour cause : on calcule là aussi le développement en série entière de φ. Ce n'est pas choquant l'obtenir la même expression. Par contre, dans cette partie, on maîtrise le reste, i.e. l'écart entre φ et la somme partielle de la série entière.*

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad I_k(x) = k!x^{k+1}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie d'après a).
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. $I_{k+1}(x) \overset{\text{b)}}{=} (k+1)xI_k(x) = (k+1)xk!x^{k+1} = (k+1)!x^{k+2}$. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad I_k(x) = k!x^{k+1}}$

Vous devez savoir faire le calcul de $I_k(x)$ sans aucune question intermédiaire : c'est un classique.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 2) puis 3)c),

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(x) + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!x^{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Donc $R_n(x) = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\right|\,\mathrm{d}t$$

Or $0 < \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ sur $[0, +\infty[$, ce qui entraine,

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t = I_{n+1}(x) = (n+1)!x^{n+2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| \leqslant (n+1)!x^{n+2}}$

b) $u_n \neq 0$ donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!10^{n+2}}{10^{n+3}(n+1)!} = \frac{n+2}{10}$$

Donc pour tout $n \in \{0, \dots, 8\}$, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et la suite est décroissante ($u_n > 0$).

Pour $n \geqslant 8$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ et la suite devient croissante.

Donc $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est minimale pour } n = 8}$

c) $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} (-1)^k I_k(1/10) + R_8(1/10)$, et d'après b) $|R_8(1/10)| \leqslant 4 \times 10^{-5}$.

Donc on peut obtenir $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right)$ avec 4 chiffres significatifs en calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} (-1)^k I_k(1/10)$.

5) Soit $z \neq 0$ et $v_k = (-1)^k k! z^{k+1}$.

$$\left|\frac{v_{k+1}}{v_k}\right| = (k+1)|z| \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty > 1$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert, $\sum |v_k|$ diverge grossièrement, donc $\sum v_k$ aussi.

Ainsi, $\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k k! z^{k+1} \text{ est } 0}$

En particulier cette série n'est pas convergente pour $z = \dfrac{1}{10}$.

On vient d'utiliser une série divergente (et pas qu'un peu divergente) pour approximer $\varphi(1/10)$....

La partie 1 montre que φ est solution de $\mathscr{E}$ et que $\mathscr{E}$ n'a pas de solution développable en série entière en 0. Donc nous savions déjà que φ n'était pas développable en série entière.

Exercice 3 (ESCP Europe 2015)

1) a) $\det(M) = -1 + 1 = 0$ donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$

b) Comme $M^2 = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$M^{k+2} = M^k M^2 = M^k \times 0 = 0$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \geqslant 2, M^n = 0}$

2) a) $\det M = a - a = 0$ donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$

b) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad M^n = (1+a)^{n-1} M$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $M^1 = (1+a)^0 M$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Comme $M^2 = \begin{pmatrix} 1+a & (1+a)a \\ 1+a & (1+a)a \end{pmatrix} = (1+a)M$, il vient

$$M^{n+1} = (1+a)^{n-1} M^2 = (1+a)^n M$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad M^n = (1+a)^{n-1} M}$

3) $\det M = b - a$.
Ainsi, $a = b$ entraîne $\det M = 0$ et M non inversible.
Réciproquement, si M est non inversible, alors $\det M = b - a = 0$ et donc $a = b$.
Conclusion : $\boxed{M \text{ est inversible si et seulement si } a \neq b}$

4) **a)** La famille des évènements $(X = k)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'évènements.
De plus, $(X = k)\cap(X = Y) = (X = k)\cap(Y = k)$. Donc la formule des probabilités totales s'écrit

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k|X = k)$$

Or X et Y sont indépendantes, donc $P(Y = k|X = k) = P(Y = k)$. En conclusion,

$$\boxed{P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k)}$$

b) $p \in]0, 1[$ donc $q^2 \in]0, 1[$ et la série géométrique $\sum q^{2n}$ converge :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \frac{1}{1-q^2}$$

Or $p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$. Conclusion : $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{1-q}{1+q}}$

c) Comme $A = (\det M \neq 0)$ et $\det M = Y - X$, il vient

$$\overline{A} = (X = Y)$$

Or, d'après a), $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k|Y = k)$.
De plus, $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}$ et $P(Y = k) = pq^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par définition de X et Y.
Donc $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{1-q}{1+q}$ d'après b).
Ainsi, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(X = Y) = 1 - \frac{1-q}{1+q}$
Conclusion : $\boxed{P(A) = \frac{2q}{1+q}}$

5) **a)** Formule du binôme :

$$\boxed{(x + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k} \qquad \text{et} \qquad \boxed{(x + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k}$$

b) En suivant l'indication de l'énoncé, il vient, d'après a),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k &= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{j} x^{i+j} \\
&= \sum_{m=0}^{2n}\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n}{m-k} x^m \qquad \text{Avec la convention } \binom{n}{i} = 0 \text{ si } i > n
\end{aligned}$$

Sans cette convention, il faut faire attention à avoir $k \leqslant n$ et $m - k \leqslant n$. Géométriquement, on somme en diagonale dans le tableau, qui est fini et non infini comme dans le produit de Cauchy. Donc il faut *exclure des termes lorsqu'on dépasse la diagonale principale $k = n$: il faut imposer $k \leqslant n$ et $k \geqslant m - n$. C'est-à-dire*

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}x^{i+j} = \sum_{m=0}^{2n}\sum_{k=\max(0,m-n)}^{\min(m,n)}\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}x^m$$

Pour $m = n$, on trouve

$$\boxed{\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}$$

c) De même qu'au 4)a), la formule des probabilités totales s'écrit

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P(Y = k)$$

Or $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ car $p = 1 - p = \dfrac{1}{2}$, et de même pour Y. Ainsi,

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = \frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

D'après c), car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Conclusion $\boxed{P(X = Y) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}}$

d) De même qu'au 4), $\boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(X = Y) = 1 - \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}}$

FIN DE L'ÉPREUVE