Épreuve de Mathématiques 7

Correction

Lycée St Joseph
Classe de PC

Mercredi 26 février 2025

Épreuve de Mathématiques 7
(CCINP PC 2023)

Correction

Rapport du jury :

1/ PRÉSENTATION DU SUJET

Le sujet était composé de trois exercices totalement indépendants. Le premier exercice était centré sur la notion d'endomorphisme cyclique. Le second exercice introduisait et établissait quelques propriétés classiques de la fonction dilogarithme. Le troisième exercice concernait l'étude d'une variable aléatoire modélisant la durée d'un jeu de société dans différentes situations.

Le sujet avait pour objectif d'évaluer les candidats sur une vaste partie du programme des deux années de classe préparatoire ainsi que sur les six grandes compétences exposées dans le programme de la filière PC. L'indépendance des trois exercices avait pour but de permettre aux candidats de commencer le sujet avec les thèmes du programme qu'ils maîtrisaient le mieux, puis de pouvoir passer facilement à un autre exercice en cas de difficulté. Le sujet était d'une longueur raisonnable afin de donner une réelle possibilité au candidat de traiter l'ensemble des questions.

2/ COMMENTAIRES GÉNÉRAUX SUR LES COPIES

L'ensemble des correcteurs ont remarqué une amélioration par rapport à la session précédente dans la qualité de la présentation des copies, notamment lors de l'utilisation de théorèmes nécessitant la vérification de nombreuses hypothèses.

Rappelons néanmoins que l'objectif d'une épreuve de mathématiques ne se résume pas à évaluer les capacités calculatoires des candidats. Ces derniers doivent également prêter attention à la présentation de leurs raisonnements avec une rédaction précise. Lorsqu'un candidat souhaite utiliser un résultat du cours, il se doit de citer et de vérifier soigneusement toutes ses hypothèses. De plus, il est important de choisir une présentation claire (avec une liste numérotée par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).

De même, si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer en citant le numéro de la question. Les candidats doivent également faire attention à introduire correctement les objets et les notations qu'ils utilisent pendant leur raisonnement. De plus, ils ne doivent pas confondre le quantificateur universel et le quantificateur existentiel.

Nous avons constaté une fois de plus qu'une partie non négligeable des candidats ne lisait pas l'énoncé et les questions assez consciencieusement : certains d'entre eux restent bloqués en ayant loupé une information dans l'énoncé ; d'autres oublient de répondre à une partie de la question.

L'ensemble des correcteurs souhaite rappeler que la présentation et le soin de la copie contribuent à son évaluation. Certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment

foncée, ce qui rend la lecture de leur copie très difficile. De plus, l'interdiction d'utiliser un effaceur n'empêche pas les candidats de raturer proprement. Nous encourageons également les candidats à aérer leur copie, à ne pas utiliser d'abréviation et à mettre en valeur leurs résultats afin d'en faciliter la lecture.

L'exercice 1 a été traité de manière pertinente par une majorité de candidats. Les difficultés rencontrées par les candidats se situaient principalement dans les parties III et IV. Une part importante de ces difficultés concernait des problèmes de logique pour la manipulation de la définition d'endomorphisme cyclique, notamment dans l'utilisation du quantificateur universel et du quantificateur existentiel.

L'exercice 2 a également été abordé de manière satisfaisante par une majorité des candidats. Par rapport à la session précédente, des progrès ont été constatés dans la manipulation des objets et des outils de l'analyse. Cependant, certains problèmes persistent : par exemple, le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées est rarement correctement rédigé. Il faut vérifier l'hypothèse sur les limites au bord de l'intervalle d'intégration et mentionner la convergence d'au moins une des deux intégrales en jeu avant de pouvoir écrire la relation d'égalité.

L'exercice 3 est celui qui a posé le plus de difficultés aux candidats, notamment les questions portant sur les probabilités. Nous tenons à rappeler que la rigueur et le formalisme ne sont pas facultatifs en probabilité. Il ne faut pas confondre un évènement avec sa probabilité, les calculs doivent être justifiés soigneusement en mentionnant l'incompatibilité ou l'indépendance des évènements lorsqu'elles sont nécessaires et il faut citer les théorèmes utilisés en vérifiant leurs hypothèses.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

Exercice 1 (Endomorphisme cyclique) :

Q1. Quelques candidats n'ont pas bien appliqué la définition d'endomorphisme cyclique : ils ont oublié de remplacer l'entier n par 2. Attention à ne pas confondre cardinal et dimension.
Q2. Une part importante de candidats ne maîtrisent pas correctement la notion de matrice d'un endomorphisme dans une base, ce qui les a conduit à obtenir une matrice erronée pour f dans la base canonique. D'autres candidats ont choisi de déterminer la matrice M de f dans la base (v,f(v)) : c'est une idée pertinente, mais ils ont souvent oublié de déduire les sous-espaces propres de f à partir des sous-espaces propres de M.
Q3. Question globalement traitée de manière pertinente.
Q4. Question globalement bien traitée.
Q5. Lorsque l'on souhaite utiliser le théorème spectral, il ne faut pas oublier de préciser que la matrice est à coefficients réels. L'utilisation d'un polynôme annulateur pour justifier la diagonalisabilité de l'endomorphisme g est peu fréquente.
Q6. Quelques candidats ont rencontré des problèmes de rédaction, notamment des confusions entre le quantificateur universel et le quantificateur existentiel.
Q7. Une part importante de candidats affirment sans aucune démonstration que l'application est à valeurs dans $R_n[X]$.
Q8. Question globalement bien traitée.
Q9. Les réponses à cette question sont souvent incomplètes et assez mal rédigées. Il ne suffit pas de traiter le cas d'un polynôme de degré n. De même, il n'est pas suffisant d'étudier uniquement l'image du terme dominant d'un polynôme P pour conclure.
Q10. Une partie des candidats ne précisent pas le polynôme P choisi pour appliquer la définition. D'autres se trompent dans la dimension de $R_n[X]$.
Q11. Il est préférable de rédiger proprement une récurrence pour démontrer la propriété demandée.
Q12. Beaucoup de candidats n'expliquent pas leurs calculs et certains ne reconnaissent pas le déterminant de Vandermonde.
Q13. Les réponses des candidats contenaient beaucoup de problèmes de logique, notamment dans l'utilisation du quantificateur universel et du quantificateur existentiel.

Exercice 2 (La fonction dilogarithme) :

Q14. Certains candidats ne comprennent pas ce qu'il faut faire dans cette question. Il n'est pas suffisant d'affirmer que le dénominateur ne s'annule pas : il faut le démontrer.
Q15. Les candidats oublient souvent de mentionner la continuité de la fonction.
Q16. Peu de candidats pensent à mentionner la positivité de f dans leur raisonnement, alors qu'ils l'utilisent implicitement pour démontrer l'inégalité.
Q17. Une part des candidats ne domine pas convenablement la fonction intégrée pour appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.
Q18. Le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées est rarement correctement rédigé. Il faut vérifier l'hypothèse sur les limites au bord de l'intervalle d'intégration et mentionner la convergence d'au moins une des deux intégrales en jeu avant de pouvoir écrire la relation d'égalité.
Q19. La plupart des candidats reconnaissent la série géométrique, mais peu d'entre eux justifient que sa raison q vérifie $|q| < 1$.
Q20. De nombreux candidats établissent que le rayon de convergence de la série entière est R=1, mais ils oublient d'étudier la convergence en $x = -1$ et en $x = 1$. Des hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont souvent omises et d'autres mal formulées.
Q21. Question globalement bien traitée.
Q22. Question globalement bien traitée. Quelques candidats ont oublié que L(1) était donné dans l'introduction de l'exercice.
Q23. Certains ont essayé d'utiliser la définition de L sous forme d'intégrale à paramètre, ce qui était davantage difficile que d'utiliser l'expression de L sous forme de la somme d'une série entière.
Q24. Beaucoup de candidats n'ont pas réussi à justifier correctement que h est dérivable sur l'intervalle]0,1[. Le calcul de h' est souvent erroné : beaucoup de candidats se sont trompés pour dériver la composée $x \to L(1-x)$.
Q25. Question peu traitée. L'étude de la limite de la fonction h en 0 ou en 1 est rarement suffisamment justifiée.

Exercice 3 (Un jeu de société) :

Q26. Les réponses des candidats sont souvent imprécises sur le lien avec l'entier n.
Q27. Les réponses des candidats sur la variable aléatoire T manquent de clarté.
Q28. Question globalement bien traitée.
Q29. Lorsqu'on utilise la règle de d'Alembert, il faut faire attention aux erreurs de calculs, notamment pour simplifier le quotient des coefficients binomiaux.
Q30. Question globalement bien traitée.
Q31. Les justifications sont souvent floues et incomplètes : il faut notamment mentionner l'indépendance entre les variables aléatoires X_k.
Q32. Les réponses données par les candidats sont souvent complètement erronées, ce qui montre une mauvaise compréhension de la situation décrite dans l'exercice.
Q33. Question globalement bien traitée.
Q34. Il n'est pas possible d'appliquer directement le résultat de la question précédente en prenant la valeur k=0.
Q35. Peu de candidats ont fait le lien avec la question 30.
Q36. Question globalement bien traitée. Néanmoins, peu de candidats justifient, même succinctement, que T est d'espérance finie.
Q37. Peu de candidats ont été capables d'appliquer simplement la formule des probabilités totales. Plusieurs justifications sont souvent omises pour arriver à la formule donnée dans l'énoncé.
Q38. L'initialisation est très rarement correctement justifiée.
Q39. Question très peu traitée et rarement correctement.

Exercice 1 (CCINP PC 2023)

Partie I - Étude d'un premier exemple

Q1. Dans cette partie, $n = 2$. Montrons que $(v, f(v))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

$$f(v) = (4, 1)$$

Or $(4, 1)$ n'est pas colinéaire à $v = (1, 0)$, donc $(v, f(v))$ est une famille libre de 2 éléments dans un espace de dimension 2.
Donc $(v, f(v))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, comme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$,

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme cyclique de } \mathbb{R}^2}$$

Q2. La matrice de f dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit vous passez par la méthode habituelle :

$$f(e_1) = f((1, 0)) = (4, 1) = 4e_1 + e_2$$

Soit vous écrivez directement

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_f(x) &= \det(xI_2 - A) \\ &= \begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} \qquad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ &= \begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ -x+3 & x-3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Le polynôme

$$\begin{aligned} &= (x-3) \begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x-3)(x-4+2) \end{aligned}$$

caractéristique est $\boxed{\chi_f(x) = (x-3)(x-2)}$, donc

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont } \lambda = 3 \text{ et } \lambda = 2 \text{ de multiplicité 1.}}$$

On vérifie ses calculs avec la trace : $\operatorname{Tr} A = 4 + 1 = 5 = 2 + 3$.

- Sous-espaces propres :
  - $E_3 = \operatorname{Ker}(3I_2 - A)$:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_3 &\iff \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff -x + 2y = 0 \\ &\iff x = 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_3 = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Une base du sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 est $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

◦ $\underline{E_2 = \operatorname{Ker}(2I_2 - A)}$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff X \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_2 = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Une base du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q3. *$(w, f(w))$ n'est pas une base si les deux vecteurs sont colinéaires. Si $w \neq 0$, c'est équivalent à « w vecteur propre de f ».*

Soit $w = (1, 1) \neq 0$. Alors $f(w) = 2w$, donc $(w, f(w))$ est liée, donc n'est pas une base :

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur } w \in \mathbb{R}^2 \text{ non nul tel que la famille } (w, f(w)) \text{ ne soit pas une base de } \mathbb{R}^2}$$

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Q4. Montrons ce résultat matriciellement :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = M + 2I_3$$

Donc

$$\boxed{g^2 = g + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}}$$

Q5. Pour les 5/2 : M est symétrique réelle, donc diagonalisable (dans une base orthonormée).
Pour les 3/2 et les 5/2 : $P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ est un polynôme annulateur de g, scindé à racines simples. Donc, par théorème de diagonalisation,

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$$

De plus, $\operatorname{Sp}(M) \subset \{-1, 2\}$.
S'il n'y a qu'une valeur propre λ (-1 ou 2), comme M est diagonalisable, elle est semblable à λI_3 :

$$\exists P \in GL_3(\mathbb{R}), \qquad M = P\lambda I_3 P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_3$$

Or $M \neq \lambda I_3$, donc elle a deux valeurs propres :

$$\boxed{\operatorname{Sp}(M) = \{-1, 2\}}$$

Pour la factorisation de $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, cherchez les racines évidentes.
Quand le polynôme est unitaire à coefficients entiers, les racines rationnelles sont à chercher dans les diviseurs du terme constant a_0 (ici, $a_0 = -2$).
Donc, ici, parmi $1, -1, 2, -2$. Sachant qu'il y a deux racines, et que leur produit est égal à -2.

Q6. *Vu la formulation de la question, et sa position en 2e exemple, il se peut qu'il ne soit pas cyclique.*
D'après la question 4, $g^2 = g + 2\,\mathrm{id}$. Donc, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, $g^2(v) - g(v) - 2v = 0$: la famille $(v, g(v), g^2(v))$ est liée.
Ainsi,

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } g \text{ n'est pas cyclique}}$$

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Q7. • Montrons que Δ est linéaire : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in E = \mathbb{R}_n[X]$:

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda\Delta(P) + \Delta(Q)\end{aligned}$$

Donc Δ est linéaire.

• Montrons que $\Delta : E \to E$: *Vous êtes dans $\mathbb{R}_n[X]$: vous devez impérativement parler de degré.*
Soit $P \in E$. Comme $\deg P(X+1) = \deg P \leqslant n$, il vient

$$\deg(\Delta(P)) \leqslant \max(\deg P(X+1), \deg P) \leqslant n$$

Donc $\Delta(P) \in E$.
Conclusion,

$$\boxed{\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])}$$

Q8. À l'aide de la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\Delta\left(X^k\right) &= (X+1)^k - X^k \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i 1^{k-i}\right) - X^k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\Delta\left(X^k\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i}$$

En particulier, si $k = 0$, $\Delta(1) = 0$.

Q9. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant, et $d = \deg P \geqslant 1$. Ainsi,

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad \text{avec} \quad a_d \neq 0$$

D'après ci-dessus, et en remarquant que $\Delta(X^0) = 0$,

$$\begin{aligned}\Delta(P) &= \sum_{k=0}^{d} a_k \Delta(X^k) \\ &= \sum_{k=1}^{d} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i\end{aligned}$$

Le terme de plus haut degré de cette somme est $a_d \binom{d}{d-1} X^{d-1}$, avec $a_d d \neq 0$ ($k = d$, $i = k-1 = d-1$).
Donc $\deg(P) = d - 1 = \deg(P) - 1$. Conclusion :

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$

Q10. Soit P un polynôme de degré n, par exemple $P = X^n$.
Alors, par récurrence sur k, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\deg(P) = \deg(P) - k$.
Donc la famille $(P, \Delta(P), \dots, \Delta^n(P))$ est de degrés échelonnés, donc libre.
Or $\dim E = n + 1$, et il y a $n + 1$ éléments dans cette famille, donc c'est une base de E.
Conclusion :

L'endomorphisme Δ est cyclique

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Q11. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme v_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, $h(v_i) = \lambda_i v_i$, et par récurrence (à rédiger, de préférence) sur $p \in \mathbb{N}^*$,

$$h^p(v_i) = \lambda_i^p v_i$$

Ainsi, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} h^p(v) &= h^p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i h^p(v_i) && \text{Par linéarité de } h^p \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^p v_i && \text{D'après ci-dessus} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n}$$

Q12. D'après la question 11, la matrice colonne des coordonnées de $h^p(v_i)$ dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1^p \\ \vdots \\ \alpha_n \lambda_n^p \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de la famille $\mathscr{F}$ est $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \alpha_1\lambda_1^n \\ \alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & \cdots & \alpha_2\lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n\lambda_n & \cdots & \alpha_n\lambda_n^n \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \det \mathscr{F} &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \alpha_1\lambda_1^n \\ \alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & \cdots & \alpha_2\lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n\lambda_n & \cdots & \alpha_n\lambda_n^n \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \curvearrowright \alpha_1 \\ \curvearrowright \alpha_2 \\ \vdots \\ \curvearrowright \alpha_n \end{matrix} \\ &= \alpha_1 \dots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^n \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Or le déterminant de la matrice de Vandermonde ci-dessus est

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Ainsi,

$$\boxed{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \dots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)}$$

Q13. La famille $\mathscr{F}$ est une base si et seulement si $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{F} \neq 0$.

Si h est cyclique, $\mathscr{F}$ est une base et il existe v tel que $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{F} \neq 0$. Donc, d'après le calcul ci-dessus, les λ_i sont 2 à 2 distincts.

Réciproquement, si les λ_i sont 2 à 2 distinct, en prenant $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$ (c'est-à-dire tous les α_i égaux à 1), $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{F} \neq 0$ d'après le calcul ci-dessus, donc on a trouvé v qui convient : h est cyclique.

Conclusion :

h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes

Exercice 2 (La fonction dilogarithme)

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Q14. *Il faut vérifier que le dénominateur ne s'annule pas.*

Soit $(x,t) \in]-\infty,1]\times]0,+\infty[$. Comme $t>0$, $e^t>1$. De plus, $x \leqslant 1$, d'où

$$x \leqslant 1 < e^t$$

Donc $0 \leqslant 1-x < e^t - x$: le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathscr{D}_f =]-\infty,1]\times]0,+\infty[$.

La fonction f est bien définie sur $\mathscr{D}_f =]-\infty,1]\times]0,+\infty[$

Q15. La fonction $g : t \mapsto f(1,t) = \dfrac{t}{e^t-1}$ est continue et positive [1] sur $]0,+\infty[$.

Étude en $t=0$:

$$f(1,t) = \frac{t}{1+t+o(t)-1} \sim \frac{t}{t} = 1$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0} f(1,t) = 1$: la fonction g est prolongeable par continuité en $t=0$, et l'intégrale est faussement généralisée en 0 : $\displaystyle\int_0^1 f(1,t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Étude en $+\infty$: Par croissance comparée,

$$t^2 f(1,t) \sim \frac{t^3}{e^t} = t^3 e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc $f(1,t) = o(1/t^2)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(1,t)\,\mathrm{d}t$ converge ($g \geqslant 0$).

Conclusion : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(1,t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc, comme $g \geqslant 0$,

La fonction $t \mapsto f(1,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

1. Sinon, il faut des valeurs absolues

Q16. Soit $t \in]0,+\infty[$. Reprenons le calcul commencé à la question **Q14.** : $x \leqslant 1 < e^t$, donc $x - e^t \leqslant 1 - e^t < 0$. Puis, en prenant les opposés,

$$0 < e^t - 1 \leqslant e^t - x$$

Comme $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leqslant \frac{1}{e^t - x} \leqslant \frac{1}{e^t - 1}$$

Ainsi,

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant f(1,t)$$

D'après la question **Q15.**, $t \mapsto f(1,t)$ est intégrable. Donc, par théorème de majoration,

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto f(x,t) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[}$$

Q17. Appliquons le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.
Soit $D =]-\infty, 1]$ et $I =]0,+\infty[$.

- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur D.
- Pour tout $x \in D$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue donc continue par morceaux sur I.
- La fonction $\varphi : t \mapsto f(1,t)$ est intégrable sur I d'après **Q15.** et, d'après **Q16.**,

$$\forall (x,t) \in D \times I \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant f(1,t) = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $D =]-\infty, 1]$. Ainsi, comme produit de fonctions continues,

$$\boxed{\text{la fonction } L \text{ est continue sur } D =]-\infty, 1].}$$

Partie II - Développement en série entière

Q18. La fonction s_n est continue sur $]0,+\infty[$.

Étude en $t = 0$: s_n est prolongeable par continuité en $t = 0$, donc $\displaystyle\int_0^1 s_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Étude en $+\infty$: Par croissance comparée, comme $n + 1 > 0$,

$$t^2 |s_n(t)| = t^3 e^{-(n+1)t} |x|^n \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Donc $|s_n(t)| = o(1/t^2)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

Conclusion :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

Pour calculer l'intégrale, effectuons une intégration par parties : *Vérifiez vos primitives !*

$$\begin{cases} u = t & u' = 1 \\ v = -\dfrac{1}{n+1} e^{-(n+1)t} & v' = e^{-(n+1)t} \end{cases}$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} uv = 0$ par croissance comparée, le théorème d'intégration par parties nous dit que $\int_0^{+\infty} uv'$ et $\int_0^{+\infty} u'v$ sont de même nature (convergente d'après ci-dessus), et que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\mathrm{d}t &= \left[\frac{-t}{n+1}e^{-(n+1)t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2}\left[e^{-(n+1)t}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = x^n \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}}$$

Q19. Soit $t \in]0,+\infty[$ fixé. Posons $q = xe^{-t}$. Comme $x \in [-1,1]$, $|q| = |x|e^{-t} \leqslant e^{-t} < 1$.
Ainsi, la série géométrique $\sum\limits_n (xe^{-t})^{n+1}$, de raison $q \in]-1,1[$, est convergente.

Donc $\boxed{\sum s_n \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[}$ De plus,

Maintenant que l'on sait que la série converge, on peut manipuler sa somme ($\sum\limits_{n=0}^{+\infty} s_n(t)$). Sinon, on effectue les calculs avec $\sum\limits_{n=0}^{N} s_n(t)$, puis *on fait tendre N vers $+\infty$.*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(n+1)t}x^n \\ &= te^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t}x)^n \\ &= te^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}x} \\ &= f(x,t)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in]0,+\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(x,t)}$$

Q20. Posons $u_n = \dfrac{x^n}{n^2}$. Comme $x \in [-1,1]$,

$$|u_n| = \frac{|x|^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par théorème de majoration, $\sum u_n$ converge absolument donc converge :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2} \text{ converge}}$$

Pour la suite de la question, traduire l'énoncé : on veut montrer que $x\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

On vient de montrer que

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(x,t)$ *(question **Q19.**)*
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$ *(question **Q18.**)*

Ainsi, on veut montrer que $\displaystyle x\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x s_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$ *: un interversion de limites.*

- La série $\sum s_n$ converge simplement sur $I =]0,+\infty[$ vers $t \mapsto f(x,t)$ continue, d'après **Q19.**.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_I s_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument d'après **Q18.**, et d'après ci-dessus

$$\int_I |s_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_I te^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t|x|^n = \frac{|x|^n}{(n+1)^2}$$

- La série $\displaystyle\sum\int_I |s_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge d'après ci-dessus.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(x,t)$, et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2}$. En multipliant par x, il vient

$$\boxed{L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}}$$

Q21. Si $n = 2k$ pair, avec $k \in \mathbb{N}$, $1 + (-1)^n = 1 + (-1)^{2k} = 1 + ((-1)^2)^k = 2$.
Si $n = 2k+1$ impair, avec $k \in \mathbb{N}$, $1 + (-1)^n = 1 + (-1)^{2k+1} = 1 - 1 = 0$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}L(x) + L(-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(1+(-1)^n)\frac{x^n}{n^2}\\ &= 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^k}{2^2k^2}\\ &= \frac{1}{2}L(x^2)\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L\left(x^2\right)}$$

Q22. D'après la question **Q20.** et l'énoncé,

$$\boxed{L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

D'après la question **Q21.**, $L(1) + L(-1) = \frac{1}{2}L(1)$, d'où $L(-1) = -\frac{1}{2}L(1)$ et

$$\boxed{L(-1) = -\frac{\pi^2}{12}}$$

Partie III - Une autre propriété

Q23. La fonction L est développable en série entière sur $]-1,1[$ donc dérivable, et, d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières,

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad L'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

On reconnaît le développement en série entière de $\ln(1-x)$:

$$\forall x \in]-1,1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Q24. La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ car composée de fonctions dérivables, et

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[, \quad h(x) &= L'(x) - L'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est constante sur l'intervalle }]0,1[}$$

Q25. Étudions la limite de h en 0 : Par croissance comparée,

$$\ln(x)\ln(1-x) \sim -x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

De plus, d'après la question **Q17.**, L est continue sur $]-\infty,1]$ donc en 0 et en 1 :

$$\lim_{x\to 0} L(x) = L(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} L(1-x) = L(1)$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = L(1)$. De plus, d'après **Q24.**, h est constante, donc

$$\boxed{\forall x \in]0,1[, \quad h(x) = L(1)}$$

Valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$: Évaluons h en $1/2$:

$$h\Big(\frac{1}{2}\Big) = L\Big(\frac{1}{2}\Big) + L\Big(\frac{1}{2}\Big) + \Big(\ln\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big)^2 = 2L\Big(\frac{1}{2}\Big) + \ln^2(2)$$

Or $h = L(1) = \pi^2/6$ d'après **Q22.**. D'où

$$\boxed{L\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2(2)}$$

Exercice 3 (Un jeu de société)

Partie I - Préliminaires

Q26. X_n représente le nombre de case dont avance le pion lors du n-ème coup, et S_n sa position après le n-ème coup.

Q27. Si $T > 0$, T représente le numéro du coup où le joueur gagne. Si $T = 0$, le joueur n'a jamais gagné.

Q28. f est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1,1[$, elle est donc $\mathscr{C}^\infty$. Montrons par récurrence que

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

est vraie pour tout $p \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie.

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p+1)}(x) &= \left(f^{(p)}\right)'(x) \\ &= -\frac{-(p+1)p!}{(1-x)^{p+2}} \\ &= \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall p \geqslant 0, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}}$

Q29. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant p$, posons $u_n = \binom{n}{p} x^n$.

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0, \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \frac{(n+1)!p!(n-p)!|x|^{n+1}}{p!(n+1-p)!n!|x|^n} \\ &= \frac{n+1}{n+1-p}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| \end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert,

- Si $|x| < 1$, $\sum u_n$ converge absolument,
- Si $|x| > 1$, $\sum |u_n|$ diverge grossièrement, donc $\sum u_n$ diverge.

Ainsi,

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n \geqslant p} \binom{n}{p} x^n \text{ est égal à } 1}$$

Q30. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, en dérivant p fois,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p}$$

Or, pour tout $n \geqslant p$, $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} = p!\binom{n}{p}$. Donc, d'après la question **Q28.**,

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}} &= \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(x) \\ &= \frac{x^p}{p!} \sum_{n=p}^{+\infty} p!\binom{n}{p} x^{n-p} \\ &= \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}}$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Q31. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
Donc S_n, somme de n variable aléatoire discrète indépendantes de même loi $\mathscr{B}(1/2)$, suit une loi binomiale de paramètre n et $1/2$:

$$\boxed{S_n \sim \mathscr{B}(n, 1/2)}$$

Q32. Comme les X_k valent au plus 1, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \geqslant A$ impose $n \geqslant A$. En tenant compte de la règle 1),

$$\boxed{T(\Omega) = \{0\} \cup [\![A, +\infty[\![}$$

Q33. Par définition de T, $(T = k) = (S_k \geqslant A) \cap (S_{k-1} < A)$. Or $S_k = S_{k-1} + X_k$ et $X_k(\Omega) = \{0,1\}$:

$$\boxed{(T = k) = (X_k = 1) \cap (S_{k-1} = A - 1)}$$

Comme les $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes, par le lemme des coalitions, $X_k \perp\!\!\!\perp S_{k-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}P(T = k) &= P(X_k = 1)P(S_{k-1} = A - 1) \\ &= \frac{1}{2} \times \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^{k-1}} && \text{Lois de Bernoulli et binomiale} \\ &= \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}}$$

Q34. Passons à l'événement contraire :

$$\begin{aligned}P(\overline{T = 0}) &= \sum_{k=A}^{+\infty} P(T = k) && \text{Union disjointe} \\ &= \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k} && \textbf{Q33.} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=A-1}^{+\infty} \binom{n}{A-1} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(1/2)^p}{(1-1/2)^{p+1}} && \textbf{Q30.} \text{ avec } x = 1/2 \in]-1,1[\text{ et } p = A-1 \in \mathbb{N}. \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{P(T=0)=0}$$

Q35. *On peut entièrement passer par la question **Q30.**, ou utiliser la méthode classique pour le rayon, sans se poser de question.*

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \geqslant A$, posons $u_k = P(T=k)x^k = \binom{k-1}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k$.

$$\begin{aligned}\forall x \neq 0, \quad \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} &= \frac{k!(A-1)!(k-A)!|x/2|^{k+1}}{(A-1)!(k-A+1)!(k-1)!|x/2|^k} \\ &= \frac{k}{k-A+1} \times \frac{|x|}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|x|}{2}\end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert,

- Si $|x|<2$, $\sum u_k$ converge absolument,
- Si $|x|>2$, $\sum |u_k|$ diverge grossièrement, donc $\sum u_k$ diverge.

Ainsi,

$$\boxed{R_T = 2}$$

Pour tout $x \in]-2,2[$,

$$\begin{aligned}G_T(x) &= \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k \\ &= \frac{x}{2}\sum_{n=A-1} \binom{n}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \frac{x}{2} \times \frac{(x/2)^{A-1}}{(1-x/2)^A} \\ &= \left(\frac{x}{2-x}\right)^A\end{aligned}$$

Q30. avec $x/2 \in]-1,1[$ et $p = A-1 \geqslant 0$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A}$$

Q36. G_T est dérivable sur $]-2,2[$, donc en 1. Ainsi, $E(T)$ existe et vaut $G_T'(1)$. De plus,

$$\forall x \in]-2,2[, \quad G_T'(x) = A\left(\frac{2-x+x}{(2-x)^2}\right)\left(\frac{x}{2-x}\right)^{A-1}$$

D'où $G_T'(1) = 2A$:

$$\boxed{\text{Le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie est de } 2A}$$

Partie III - Étude d'un second cas

Q37. Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$. La formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'évènements $\Big((X_{n+1} = \ell)\Big)_{\ell \in [\![0, M-1]\!]}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} \leqslant k) &= \sum_{\ell=0}^{M-1} P\Big((S_{n+1} \leqslant k) \cap (X_{n+1} = \ell)\Big) \\
&= \sum_{\ell=0}^{M-1} P\Big((S_n \leqslant k-\ell) \cap (X_{n+1} = \ell)\Big) && \text{Car } S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{M-1} P(S_n \leqslant k-\ell) P(X_{n+1} = \ell) && \text{D'après le lemme des coalition, } X_{n+1} \perp\!\!\!\perp S_n, \text{ cf } \mathbf{Q33.} \\
&= \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} P(S_n \leqslant k-\ell) && \text{Car } X_{n+1} \text{ suit une loi uniforme sur } [\![0, M-1]\!]
\end{aligned}$$

Or $S_n \geqslant 0$, donc $P(S_n \leqslant k-\ell) = 0$ si $\ell > k$: la somme va jusqu'à $\max(M-1, k)$.
Et, de plus, $M - 1 \geqslant A - 1 \geqslant k$. Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P\left(S_{n+1} \leqslant k\right) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P\left(S_n \leqslant k-\ell\right)}$$

Q38. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $P(S_1 \leqslant k) = P(X_1 \leqslant k)$ Car $S_1 = X_1$
  $= \dfrac{k+1}{M}$
  $= \dfrac{1}{M^1} \binom{1+k}{1}$
  D'où $\mathcal{H}_1$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$. D'après **Q37.**

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} \leqslant k) &= \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k-\ell) \\
&= \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{M^n} \binom{n+k-\ell}{n} && \text{D'après } \mathcal{H}_n \text{ en } k-\ell \in [\![0, A-1]\!] \\
&= \frac{1}{M^{n+1}} \binom{n+1+k}{n+1} && \text{D'après la formule donnée par l'énoncé}\,[2]
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad \forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_n \leqslant k) = \dfrac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}}$

Cette propriété est aussi vraie pour $n = 0$.

2. La formule $\displaystyle\sum_{n=k}^{p} \binom{n}{k} = \binom{p+1}{k+1}$ se montre par récurrence sur p, à k fixé, en commençant à $p = k$. C'est une sommation verticale dans le triangle de Pascal. Faire un dessin. Exercice classique.

Q39. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n < A$ entraîne $T > n$ *ou* $T = 0$. Et réciproquement. Ainsi, le résultat restant vrai pour $n = 0$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (S_n < A) = (T > n) \cup (T = 0)}$$

Comme l'union est disjointe, en notant $P(T = 0) = a$, il vient

$$0 \leqslant P(T > n) = P(S_n < A) - a \leqslant P(S_n < A)$$

De plus, S_n est à valeurs entières donc $(S_n < A) = (S_n \leqslant A - 1)$, et d'après **Q38.** (et reste vraie en 0)

$$P(S_n \leqslant A - 1) = \frac{1}{M^n}\binom{n + A - 1}{n}$$

D'après le théorème du cours rappelé par l'énoncé, T admet un espérance si et seulement si la série $\sum P(T > n)$ converge, et, dans ce cas, $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n < A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{M^n}\binom{n + A - 1}{n} && \text{Calculs dans } [0, +\infty] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{M^n}\binom{n + A - 1}{A - 1} && \text{Car } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\
&= \sum_{n=A-1}^{+\infty} \frac{1}{M^{n-(A-1)}}\binom{n}{A - 1} \\
&= M^{A-1} \sum_{n=A-1}^{+\infty} \binom{n}{A - 1}\left(\frac{1}{M}\right)^n && \text{Or } \frac{1}{M} \in]-1, 1[\\
&= M^{A-1}\frac{(1/M)^{A-1}}{(1 - 1/M)^A} && \text{D'après } \textbf{Q30.} \\
&= \left(\frac{M}{M - 1}\right)^A \in [0, +\infty[
\end{aligned}$$

Donc $\sum_n P(S_n < A)$ converge, et, par théorème de majoration, $\sum P(T > n)$ converge. Ce qui entraîne $a = P(T = 0) = 0$, donc $P(T > n) = P(S_n < A)$, et en conclusion

$$\boxed{T \text{ admet une espérance et } E(T) = \left(\frac{M}{M - 1}\right)^A}$$

FIN DE L'ÉPREUVE