Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Exercice 1 (Endomorphisme cyclique)

Présentation générale

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{ld}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $\Big(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)\Big)$ soit une base de l'espace vectoriel E.

Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$$

Q1. En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

Q2. Déterminer les valeurs propres de f et donner une base de chaque sous-espace propre de f.

Q3. Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Q4. Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Q5. Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

Q6. L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Par exemple, on a $\Delta\left(X^2\right) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$

Q7. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q8. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.

Q9. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

Q10. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.
Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k.
Soit $v \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Q11. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

Q12. Montrer que le déterminant de la famille $\mathcal{F} = \left(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)\right)$ dans la base $\mathcal{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Q13. Conclure que h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

Exercice 2 (La fonction dilogarithme)

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence par définir la fonction dilogarithme dans la première partie, puis on étudie quelques-unes de ses propriétés dans les parties suivantes.
On admet et on pourra utiliser librement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Dans cette partie, on considère la fonction $f :]0,+\infty[\times]-\infty,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (t,x) \in]0,+\infty[\times]-\infty,1], \quad f(t,x) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x}.$$

Q14. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0,+\infty[\times]-\infty,1]$.

Q15. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Q16. Soit $x \in]-\infty,1]$. En comparant les fonctions $t \mapsto f(t,x)$ et $t \mapsto f(t,1)$, montrer que $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction $L :]-\infty,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty,1], \quad L(x) = x\int_0^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}t$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

Q17. Montrer que la fonction L est continue sur $]-\infty,1]$.

Partie II - Développement en série entière

Dans cette partie, on montre que la fonction L est développable en série entière. On considère un nombre réel $x \in [-1,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad s_n(t) = t\mathrm{e}^{-(n+1)t}x^n.$$

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

Q19. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} s_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t,x)$$

Q20. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge et déduire des questions précédentes que $L(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Q21. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, on a $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2}L\left(x^2\right)$.

Q22. Déduire des questions précédentes les valeurs de $L(1)$ et $L(-1)$.

Partie III - Une autre propriété

Dans cette partie, on considère la fonction $h :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0,1[, \quad h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$$

Q23. Justifier que la fonction L est dérivable sur $]-1,1[$ et montrer que l'on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Q24. Montrer que la fonction h est constante sur $]0,1[$.

Q25. Montrer que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in]0,1[$. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 (Un jeu de société)

Présentation générale

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $[\![0, M-1]\!]$: le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :
1) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;
2) sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geqslant A\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire T dans deux cas particuliers.

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

Q26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représentent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?

Q27. Que représente la variable aléatoire T ?

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Q28. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

Q29. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1 .

Q30. Soit $p \in \mathbb{N}$. En développant la fonction f en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

Q31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Q32. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

Q33. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction des évènements $(S_{k-1} = A - 1)$ et $(X_k = 1)$. En déduire que :

$$P(T = k) = \begin{pmatrix} k-1 \\ A-1 \end{pmatrix} \frac{1}{2^k}$$

Q34. Calculer $P(T = 0)$.

Il.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est égale à la somme de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} P(T = k)x^k$ sur son intervalle de convergence.

Q35. Déterminer la rayon de convergence R_T de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} P(T = k)x^k$ et montrer que :

$$\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.$$

Q36. En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $P\left(S_n \leqslant k\right)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{\ell=0}^{k} \begin{pmatrix} n+k-\ell \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1+k \\ n+1 \end{pmatrix}.$$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le système complet d'évènements $\left((X_{n+1} = 0), \ldots, (X_{n+1} = M-1)\right)$, montrer que :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P\left(S_{n+1} \leqslant k\right) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P\left(S_n \leqslant k - \ell\right).$$

Q38. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P\left(S_n \leqslant k\right) = \frac{1}{M^n} \begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix}$$

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé librement dans la suite : si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} P(Z > n)$ converge, alors Z admet une espérance et on a l'égalité :

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n)$$

Q39. Que peut-on dire des évènements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.

FIN DE L'ÉPREUVE