Épreuve de Mathématiques 7

Correction

Exercice 1 (CCINP PC 2020)

Partie I - Préliminaires

1) Soit $x > 0$.
$t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles.
Pour tout $t > 0$, $|\sin(t)| \leqslant |t|$, donc $|f(x,t)| = \left|\dfrac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt}$.
Or $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $x > 0$), donc, par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) • Posons $u'(t) = \sin(t)$, $u(t) = 1 - \cos(t)$, $v(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$u(t)v(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t} = \dfrac{1-(1-t^2/2+o(t^2)}{t} = \dfrac{t^2/2+o(t^2}{t} = \dfrac{t}{2} + o(t) \underset{t\to 0}{\to} 0.$
$u(t)v(t) = \dfrac{\overbrace{1-\cos(t)}^{\text{borné}}}{t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$
D'où, par intégration par parties, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ sont de même nature, donc I converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge.
• $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1-(1-t^2/2+o(t^2)}{t^2} = \dfrac{t^2/2+o(t^2}{t^2} = \dfrac{1}{2} + o(1) \underset{t\to 0}{\to} 1/2$, donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0,1]$.
$\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{O(1)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
$t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge, donc, d'après le premire point de cette question, I converge.

3) Soit $x \geqslant 0$.
$t \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -\frac{x\cos(t)-\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} - \frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2} \times (-x)e^{-xt}\\ &= \frac{-x\cos(t)+\sin(t)+x^2\sin(t)+x\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}\\ &= \frac{(1+x^2)\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} = \sin(t)e^{-xt},\end{aligned}$$

donc $t \mapsto u(x,t)$ est bien une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

4) • Soit $x>0$.

Pour tout $t>0$, $|f(x,t)| = \left|\dfrac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt}$.

D'où, par l'inégalité triangulaire généralisée et par positivité de l'intégrale convergente (avec "$0 \leqslant +\infty$"), on a :

$$|F(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(x,t)dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(x,t)|dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}.$$

• Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc, par encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

5) Soit $a>0$.

- Pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 1 avec $x\geqslant a>0$).
- Pour tout $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ (constante fois une exponentielle) et, pour tout $x\geqslant a$,

$$t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}$$

  est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x\geqslant a$, pour tout $t>0$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at} = \varphi(t),$$

  où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $a>0$).

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $F : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et, pour tout $x\geqslant a$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt.$$

6) F est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc F est dérivable sur $\displaystyle\bigcup_{a>0}[a,+\infty[=]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt = -\left[u(x,t)\right]_0^{+\infty} = -\left(0+\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

F est une primitive de F' sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe $K\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x>0$,

$$F(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + K.$$

Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$, donc $-\dfrac{\pi}{2}+K=0$, donc $K=\dfrac{\pi}{2}$, et, par suite, pour tout $x>0$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x).$$

Partie III - Conclusion

7) • Pour tout $t \in]0,1]$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.
• Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$.
• Pour tout $t \in]0,1]$, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt} \leqslant 1 = \varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $]0,1]$ (constante sur un intervalle borné).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x,t)dt$ est continue sur $[0,1]$.

8) Soit $x \in [0,1]$.
• Pour tout $t \geqslant 1$,

$$\frac{u(x,t)}{t^2} = \frac{1}{t^2} \times \left(-\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}\right) = \frac{1}{t^2} \times \underset{t\to+\infty}{O}(1) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge.

• Posons $w'(t) = \sin(t)e^{-xt}$, $w(t) = u(x,t)$, $v(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.
w et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.
$w(t)v(t) = \dfrac{u(x,t)}{t} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.
$\displaystyle\int_1^{+\infty} w(t)v'(t)dt = -\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge d'après le premier point.
D'où, par intégration par parties, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,t)dt = \int_1^{+\infty} w'(t)v(t)dt$ converge (mais on le savait déjà) et

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \left[\frac{u(x,t)}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt \\ &= \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt. \end{aligned}$$

9) • Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[1,+\infty[$.
• Pour tout $t \geqslant 1$, $x \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[0,1]$.
• Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \geqslant 1$,

$$\left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}\frac{x|\sin(t)|+|\cos(t)|}{1+x^2}e^{-xt} \leqslant \frac{1}{t^2}\frac{1+1}{1} \times 1 = \frac{2}{t^2} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt$ est continue sur $[0,1]$.
• De plus, $x \mapsto \dfrac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ (par opérations sur les fonctions usuelles), donc F_2 est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

10) • D'où, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ existe (on le savait déjà, cf 1 et 2) et

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)dt + \int_1^{+\infty} f(x,t)dt = F_1(x) + F_2(x),$$

donc $F = F_1 + F_2$, donc F est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.
• On a donc, par continuité de F en 0,

$$I = F(0) = \lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2 (D'après Centrale PC 2019 — et E3A, CNM, Centrale TSI 2022)

Attention à bien comprendre les objets avant de vous lancer. $J(a_0,\dots,a_{n-1})$, ce n'est pas la même chose que J.
Vous pouvez aussi revoir **l'exercice 3, matrices A_6 et B_6 de la feuille réduction** *: c'est le cas particulier $n=3$, le problème ci-dessous est le cas général $n \geqslant 2$ quelconque.*
En toute généralité, lorsque vous avez des matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ou quelque chose qui dépend de n), vous pouvez essayer de l'écrire pour n petit, pour comprendre ce que l'on vous demande.
Beaucoup d'entre étiez parfaitement capable de faire une bonne partie de l'exercice si vous aviez pris le temps de comprendre les objets.

A - Calcul des puissances de J

1) • Si $n = 2$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J^2 = I_2$$

• Si $n > 2$, $J = J(0,1,0,\dots,0)$, c'est-à-dire

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

J^2 est la matrice de l'application φ^2 vérifiant

$$\varphi^2(e_j) = e_{j+2} \text{ si } j \in \{1,\dots n-2\}, \quad \text{et} \quad \varphi^2(e_{n-1}) = e_1, \varphi^2(e_n) = e_2$$

Donc $J^2 = J(0,0,1,0,\dots,0)$:

$$\boxed{J^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2) Soit $k \in\in [\![2,n]\!]$. Avec la convention $e_i = e_{i-n}$ si $i > n$,

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,, \quad \varphi^k(e_j) = e_{j+k}$$

En particulier, pour $k = n$, on trouve $\varphi^n(e_j) = e_j$, donc $\varphi^n = \mathrm{id}_E$:

$$\boxed{J^n = I_n}$$

Et pour $k \in [\![2, n-1]\!]$,

- $\varphi^k(e_1) = e_{1+k} = e_{k+1}$
- $\varphi^k(e_{n-k}) = e_n$
- $\varphi^k(e_{n-k+1}) = e_{n+1} = e_1$
- $\varphi^k(e_n) = e_{n+k} = e_k$

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} n-k+1 \\ \downarrow \end{array} & \\
\begin{array}{r} \\ \\ \\ k+1 \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} & & & 1 & & (0) \\ & & & & \ddots & \\ & & (0) & & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ (0) & & 1 & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \uparrow \\ n-k \end{array} &
\end{array}$$

3) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, d'après 1 et 2,

$$\boxed{J^k = J(a_0, \dots, a_{n-1}) \text{ avec } a_k = 1 \text{ et } a_j = 0 \text{ si } j \neq k}$$

B - Étude de $\mathcal{A}$

4) *Bien comprendre « $x \in F$ ».*

Si vous prenez $F = \mathbb{R}_n[X]$, et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Un second élément sera $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. Ce n'est pas le « $\sum$ » que vous transformez en une autre lettre ...
Ici $M \in \mathcal{A}$: $M = J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \ldots$ la matrice de l'énoncé.
Si on prends un second élément $N \in \mathcal{A}$, il sera N de la forme $J(a_0, \dots, a_{n-1})$, mais comme les $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont déjà pris, nommons les $b_0, \dots, b_{n-1}$: $N = J(b_0, \dots, b_{n-1}) = \ldots$

- Par définition, $\mathcal{A} \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Comme $J(0, \dots, 0) = 0 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$

  Pour prouver que $M \in \mathcal{A}$, il faut trouver $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $M = J(a_0, \dots, a_{n-1})$.
  On peut aussi utiliser la question 3 : $J \in \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $M = J(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathcal{A}$ et $N = J(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}
\lambda M + N &= \lambda \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \cdots & b_1 \\ b_1 & b_0 & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a_0 + b_0 & \lambda a_{n-1} + b_{n-1} & \cdots & \lambda a_1 + b_1 \\ \lambda a_1 + b_1 & \lambda a_0 + b_0 & \ldots & \lambda a_2 + b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n-1} + b_{n-1} & \lambda a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & \lambda a_0 + b_0 \end{pmatrix} \\
&= J(\lambda a_0 + b_0, \dots, \lambda a_{n-1} + b_{n-1})
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

5) Soit $\mathscr{B} = (I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$. Par linéarité de $(a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto J(a_0, \dots, a_{n-1})$, et d'après 3, on a

$$\forall (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \qquad J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$$

- Montrons que $\mathscr{B}$ est libre : Soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1})\in\mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k J^k=0$. D'après ci-dessus,

$$\begin{aligned}0&=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k J^k\\&=J(\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1})\\&=\begin{pmatrix}\lambda_0&\lambda_{n-1}&\cdots&\lambda_1\\\lambda_1&\lambda_0&\dots&\lambda_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda_{n-1}&\lambda_{n-2}&\cdots&\lambda_0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  Donc $\lambda_0=\cdots=\lambda_{n-1}$: $\mathscr{B}$ est libre.

- Montrons que $\mathscr{B}$ est génératrice : Soit $J(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathcal{A}$.

$$J(a_0,\dots,a_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}a_kJ^k\in\operatorname{Vect}\left(J^0,\dots,J^{n-1}\right)$$

  Donc $\mathscr{B}$ est génératrice.

Conclusion :

$$\boxed{(I_n,J,J^2,\dots,J^{n-1})\text{ est une base de }\mathcal{A}}$$

De plus, par définition de la dimension,

$$\boxed{\dim\mathcal{A}=\operatorname{Card}\mathscr{B}=n}$$

6) *On peut montrer, par un calcul matriciel direct, que $J(a_0,\dots,a_{n-1})J(b_0,\dots,b_{n-1})=J(b_0,\dots,b_{n-1})J(a_0,\dots,a_{n-1})$, mais c'est un peu calculatoire. Le point de vue ci-dessous est plus élégant.*

D'après la question 5, $\mathcal{A}=\operatorname{Vect}\left(J^0,\dots,J^{n-1}\right)$.

Soit $A=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}a_iJ^i$ et $B=\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}b_jJ^j$ deux éléments de $\mathcal{A}$. Alors

$$\begin{aligned}AB&=\sum_{i=0}^{n-1}a_iJ^i\sum_{j=0}^{n-1}b_jJ^j\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}a_ib_jJ^{i+j}\\&=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}b_ja_iJ^{i+j}\\&=BA\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour toutes matrices }A\text{ et }B\text{ de }\mathcal{A},\ AB=BA.}$$

Une expression sans aucun calculs : A et B sont des polynômes en J, donc commutent.

C - Diagonalisation de J

7) Les solutions de $z^n = 1$ sont

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ \mid \ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}}$$

8) D'après la question 2, $J^n = I_n$, donc

$$\boxed{P = X^n - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } J}$$

9) *Il faut énoncer correctement le théorème et prouver les hypothèses.*

Soit $P = X^n - 1$. Sur $\mathbb{C}$, algébriquement clos, P est forcément scindé. Les racines de P sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, donc au nombre de $n = \deg P$: P est **scindé à racines simples**.

D'après le théorème de diagonalisation,

$$\boxed{J \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$$

Pour prouver que P est à racines simples, on peut aussi raisonner par l'absurde : soit λ une racine multiple de P alors, elle est racine de $P' = nX^{n-1}$, donc $\lambda = 0$ ($n \geqslant 2$), or $P(0) = -1 \neq 0$. Donc P n'a que des racines simples.

10) *Attention ! N'oubliez pas les cas particulier, et soyez précis : vous voulez dire que des valeurs propres $\lambda \notin \mathbb{R}$, ce qui n'est pas la même chose qu'appartenir à $\mathbb{C}$: $1 \in \mathbb{C}$, après tout...*

- Si $n = 2$, $P = X^2 - 1$ est annulateur de J et scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, donc J diagonalisable.
- Supposons $n > 2$. Montrons par l'absurde que J a des valeurs propres complexes non réelles : supposons que J est diagonalisable.

  Les valeurs propres de J sont réelles, et incluses dans $\mathbb{U}_n$, donc $\mathrm{Sp}\,(J) \subset \{-1, 1\}$. *Attention, là aussi : vous n'avez qu'une inclusion, vous n'avez pas le polynôme caractéristique.*

  Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $J = PDP^{-1}$. Comme D n'a que des 1 et des -1 sur la diagonale, $D^2 = I_n$ et
  $$J^2 = PD^2P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$$
  Or, pour $n > 2$, $J^2 = J(0, 1, 0, \dots, 0) \neq I_n$: c'est absurde.

  Donc J n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\text{La matrice } J \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } n = 2}$$

11) Comme P a pour racines $\mathbb{U}_n$ et est un polynôme annulateur de J, $\mathrm{Sp}\,(J) \subset \mathbb{U}_n$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, et $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Posons $X_k = \begin{pmatrix} \omega_k^{n-1} \\ \vdots \\ \omega_k \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$.

$$\begin{aligned} JX_k &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_k^{n-1} \\ \omega_k^{n-2} \\ \vdots \\ \omega_k \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k^{n-1} \\ \vdots \\ \omega_k^2 \\ \omega_k \end{pmatrix} = \omega_k X_k \qquad \text{Car } \omega_k^n = 1 \end{aligned}$$

Donc X_k est un vecteur propre de J pour la valeur propre ω_k.
En particulier, $\mathbb{U}_n \subset \mathrm{Sp}\,(J)$. Par double inclusion,

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(J) = \mathbb{U}_n}$$

Nous venons de montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $X_k \in E_{\omega_k}$, donc Vect $X_k \subset E_{\omega_k}$.
Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dim E_{\omega_k} = \dim \mathbb{C}^n = n$, et, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dim E_{\omega_k} \geqslant 1$. Donc $\dim E_{\omega_k} = 1$.
Par inclusion et égalité des dimensions,

$$\boxed{\forall \omega \in \mathbb{U}_n = \mathrm{Sp}\,(J), \quad E_\omega = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} \omega^{n-1} \\ \vdots \\ \omega \\ 1 \end{pmatrix})}$$

12) Sur $\mathbb{C}$, χ_J est scindé et s'écrit

$$\chi_J(x) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(J)} (x - \lambda)^{\alpha_\lambda}$$

où α_λ est la multiplicité de la valeur propre λ.
Or J est diagonalisable (dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$), donc $\alpha_\lambda = \dim E_\lambda$.
De plus, $\mathrm{Sp}\,(J) = \mathbb{U}_n$ et $\dim E_\omega = 1$ pour tout $\omega \in \mathrm{Sp}\,(J)$:

$$\chi_J(x) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (x - \omega)$$

Ainsi, comme les $\mathbb{U}_n$ sont exactement les racines, qui sont toutes simples, de $P = X^n - 1$,

$$\boxed{\chi_J(x) = x^n - 1}$$

D - Diagonalisation de $\mathcal{A}$

13) D'après la question 9, J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $J = PDP^{-1}$.
Suite à la question 11, on peut même expliciter un couple P, D qui convient : $p_{ik} = \omega_k^{n-1-i}$ avec $(i,k) \in [\![0, n-1]\!]^2$ et $d_{kk} = \omega_k$.
Comme $\omega_k = e^{2ik\pi/n} = \omega_1^k$, en notant $\omega = \omega_1 = e^{2i\pi/n}$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix} \quad et \quad P = \begin{pmatrix} 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \\ 1 & \omega^{n-2} & \omega^{2(n-2)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_{n-1} & \omega_{n-1}^2 & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \omega_{n-2} & \omega_{n-2}^2 & \cdots & \omega_{n-2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

P est donc une matrice de Vandermonde !

D'après la question 3, $A \in \mathcal{A}$ s'écrit $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k (PDP^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k PD^kP^{-1} && \text{par récurrence} \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k\right) P^{-1} \\ &= PD_AP^{-1} \end{aligned}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, D^k est diagonale, puis D_A est diagonale comme combinaison linéaire de matrices diagonales :

$$\boxed{\text{Il existe } P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ telle que, pour toute matrice } A \in \mathcal{A}, \text{ la matrice } P^{-1}AP \text{ soit diagonale.}}$$

14) Avec les notations de la question précédente, $A = Q(J)$, et les valeurs propres sont sur la diagonales de $D_A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k = Q(D)$. Notons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Comme $\mathrm{Sp}\,(J) = \mathbb{U}_n = \{\omega^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$, on peut choisir D comme ci-dessous :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D_A = \begin{pmatrix} Q(1) & & & \\ & Q(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Ainsi, les valeurs propres de matrice A sont

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(A) = \{Q(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}\,(J)\} = \{Q(\omega^k) \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}}$$

Plus généralement, en reprenant la preuve en remplaçant D par T triangulaire ayant pour termes diagonaux les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ d'une matrice M, on prouve que $Q(M)$ a pour valeurs propres $Q(\lambda_1), \ldots, Q(\lambda_n)$ (compté avec multiplicité).

Exercice 3 (CCINP PC 2020)

Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Partie I - Calcul de p_n

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Chaque variable X_k modélise le pas de l'instant k, et la position du pion à l'instant 0 est $S_0 = 0$. Donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ modélise la positition du pion à l'instant n.

2) $p_0 = P(S_0 = 0) = 1$ par définition de S_0.
Comme $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = \{\pm 1\}$, on a $p_1 = P(S_1 = 0) = 0$. Enfin, $p_2 = P(S_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 0)$.
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = k)_{k \in X_1(\Omega)} = \{(X_1 = -1), (X_1 = 1)\}$, on a

$$\begin{aligned} p_2 = P(X_1 + X_2 = 0) &= P(X_1 = 1 \cap X_1 + X_2 = 0) + P(X_1 = -1 \cap X_1 + X_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = -1) + P(X_2 = -1 \cap X_1 = 1) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3) Si n est impair, alors pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{X_k(\omega)}_{\in\{\pm 1\}}$ est la somme d'un nombre impair de nombres impairs, donc est impair.
Par suite, $p_n = P(S_n = 0) = 0$, car l'événement $(S_n = 0)$ est impossible (car 0 est un nombre pair).

4) On a $Y_k(\Omega) = \left(\frac{X_k + 1}{2}\right)(\Omega) = \left\{\frac{1+1}{2}, \frac{-1+1}{2}\right\} = \{0, 1\}$, donc Y_k suit une loi de Bernoulli.
De plus, $P(Y_k = 1) = P\left(\frac{X_k + 1}{2} = 1\right) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$, donc Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

5) • Les variables $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ suivent toutes une loi de Bernoulli et sont indépendantes, donc, pour tout $n > 0$, $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
Par suite, $Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

• De plus,

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}X_i + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{2} = \frac{S_n + n}{2},$$

donc $S_n = 2Z_n - n$.

6) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $2m > 0$, donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} p_{2m} &= P(S_{2m} = 0) = P(2Z_{2m} - 2m = 0) = P(Z_{2m} = m) \\ &= \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}. \end{aligned}$$

Comme $\binom{0}{0}\frac{1}{4^0} = 1 = p_0$, ce résultat est encore valable pour $m = 0$.

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

7) *On utilise la propriété du cours sur les séries entières :*

$$\Big[\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant |b_n|\Big] \Longrightarrow R\left(\sum a_n x^n\right) \geqslant R\left(\sum b_n x^n\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p_n| = P(S_n = 0) \leqslant 1$, donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} p_n x^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} 1x^n$, c'est-à-dire $R_p \geqslant 1$.

On peut aussi utiliser d'Alembert, comme à la question de cours $\sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{n} z^{2n}$*, mais correctement : en particulier, sans* **diviser par** 0*.*
Pour $n \in \mathbb{N}$, $p_{2n+1} = 0$ *d'après 3), et* $p_{2n} = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} \neq 0$ *d'après 6).*
Ainsi, R_p *est le rayon de* $\sum p_{2n}x^{2n}$*. Soit* $u_n = p_{2n}x^{2n}$*.*

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0, \qquad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \frac{p_{2n+2}|x|^{2n+2}}{p_{2n}|x|^{2n}} \\ &= \dots \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 2^2}x^2 \\ &\sim \frac{(2n)(2n)}{4n^2}x^2 = x^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2 \end{aligned}$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert,

- *Si* $|x| < 1$, $\sum u_n$ *converge absolument ;*
- *Si* $|x| > 1$, $\sum |u_n|$ *diverge grossièrement donc* $\sum u_n$ *diverge.*

Donc $R_p = 1 \geqslant 1$*.*

8) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right) &= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)\right)\\
&= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{2k-1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{m!2^m}\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\prod_{k=1}^{m}(2k)}{\prod_{k=1}^{m}(2k)}\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{\prod_{k=1}^{2m}k}{2^m\prod_{k=1}^{m}k}\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{m!m!}\frac{1}{2^m 2^m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m} = p_{2m}
\end{aligned}$$

9) D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^n.$$

Par suite, pour tout $x \in]-1,1[$, comme $(-x^2) \in]-1,1[$, on a

$$(1-x^2)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)(-x^2)^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^{2n}.$$

Par ailleurs, avec les expressions trouvées pour p_n dans la partie précédente, on a, pour tout $x \in]-1,1[$ (on a $R_p \geqslant 1$),

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}p_n x^n &= p_0+\sum_{n=1}^{+\infty}p_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{p_{2n+1}}_{=0}x^{2n+1}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}p_{2n}x^{2n}.
\end{aligned}$$

D'où, pour $\alpha = -1/2$, comme $p_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)$ pour tout $n \geqslant 1$ d'après la question précédente, on a $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

10) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T = n \Rightarrow S_n = 0$, donc $(T = n) \subset (S_n = 0)$, donc $P(T = n) \leqslant P(S_n = 0)$.
Or, pour tout n impair, $P(S_n = 0) = 0$, donc, pour tout n impair, $q_n = P(T = n) = 0$. En particulier, pour $n = 1$, $q_1 = 0$.
• $S_1 = 0$ est impossible, donc, par définition de T, on a $T \geqslant 2$ et $T = 2 \Leftrightarrow S_2 = 0$, donc $q_2 = P(T = 2) = P(S_2 = 0) = p_2 = \dfrac{1}{2}$.

11) • Pour tout $x \in [-1,1]$,

$$|g_n(x)| = |q_n x^n| = P(T = n)|x|^n \leqslant P(T = n),$$

donc $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]} \leqslant P(T = n)$.
Or $\sum_{n\geqslant 0}P(T = n)$ converge (et vaut $1 - P(T = +\infty)$ car $T(\Omega) = \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$), donc, par comparaison,

$\sum_{n\geqslant 0} \|g_n\|_\infty^{[-1,1]}$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

• Comme $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$, $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $[-1,1]$, donc, en particulier, pour $x=1$, $\sum_{n\geqslant 0} g_n(1)$ converge, ce qui assure que

$$R_q = \sup\{\rho > 0 : \sum_{n\geqslant 0} q_n\rho^n \text{ converge}\} \geqslant 1.$$

12) f et g sont deux fonctions développables en série entière au moins sur $]-1,1[$, donc, par produit de Cauchy, fg est développable en série entière au moins sur $]-1,1[$ et, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right)x^n\\
&= \left(\sum_{k=0}^{0} p_k q_{n-k}\right)x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right)x^n\\
&= p_0q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \quad \text{(d'après la relation admise pour tout } n\in\mathbb{N}^*\text{)}\\
&= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n\\
&= -1 + p_0x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n\\
&= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = -1 + f(x).
\end{aligned}$$

13) • Comme, pour tout $x\in]-1,1[$, $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ (d'après la question 9), la relation obtenue à la question précédente devient :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad (1-x^2)^{-1/2}g(x) = (1-x^2)^{-1/2} - 1,$$

donc, en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}$, on a bien, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}.$$

• Pour tout $x\in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^n,$$

donc, pour $\alpha = 1/2$, on a , pour tout $x\in]-1,1[$, comme $(-x^2)\in]-1,1[$,

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right)x^{2n},$$

donc

$$g(x) = 1-\sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right)x^{2n},$$

où le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

14) Pour tout $x\in]-1,1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right)x^{2n}$, donc, par unicité du développement en série entière sur $]-1,1[$, on a :

$$q_0 = 0,\quad \left(\forall n\in\mathbb{N}^*, q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\right)\quad \text{et}\quad (\forall n\in\mathbb{N}, q_{2n+1} = 0)\,.$$

15) • Comme $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a

$$P(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n 1^n = 1 - g(1).$$

• Or, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[-1, 1]$ et $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1, 1]$ (d'après la questin 11), la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est continue sur $[-1, 1]$.
En particulier, elle est continue en 1, donc

$$\begin{aligned} g(1) &= \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - \sqrt{1 - x^2} \quad \text{(d'après l'expression trouvée en 13)} \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

• On a donc $P(T = +\infty) = 1 - g(1) = 0$, donc l'événement $T = +\infty$ est quasi impossible, donc on est quasi certain que le pion reviendra à l'origine à un instant donné.

16) *Pour me raccrocher au programme, je vais alors considérer que* $T(\Omega) = \mathbb{N}$.
$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(T = n)$ est la série génératrice de T.
D'après le cours, T admet une espérance si et seulement si g est dérivable en 1. Or, pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, donc g est dérivable sur $]-1, 1[$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \underset{x \to 1^-}{\to} +\infty.$$

g est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et $\lim_{x \to 1^-} g'(x) = +\infty$, donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, g n'est pas dérivable en 1, et, par suite, T n'admet pas d'espérance.

FIN DE L'ÉPREUVE