Lycée St Joseph
Classe de PC

Mardi 28 février 2023

Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
Ne pas utiliser de correcteur.
Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

1) Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2) En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

3) Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0,+\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

4) Montrer que $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

5) Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a,+\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

6) En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

7) Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

8) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

9) Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

10) En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

Exercice 2

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Toute réponse doit être justifiée : le cas échéant, il faut prouver point par point toutes les propriétés qui justifient votre affirmation.
Pour tout $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(a_0,\ldots,a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice(i,j) de $J(a_0,\ldots,a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geqslant j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0,\ldots,a_{n-1})$ où $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{A} = \{J(a_0,\ldots,a_{n-1}) \ | \ (a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\}$$

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1,\ldots n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1,\ldots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

A - Calcul des puissances de J

1) Préciser les matrices J et J^2. (on pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n > 2$).

2) Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

3) Quel est le lien entre la matrice $J(a_0,\ldots,a_{n-1})$ et les J^k, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$?

B - Étude de $\mathcal{A}$

4) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5) Montrer que $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{A}$?

6) Montrer que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}$, $AB = BA$.

C - Diagonalisation de J

7) Rappeler l'expression à l'aide d'une exponentielle complexe des racines n-ième de l'unité, solutions de

$$z^n = 1 \qquad z \in \mathbb{C}$$

8) Déterminer un polynôme annulateur de J.

9) En déduire que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

10) La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

11) Déterminer les valeurs propres complexes de J est les espaces propres associés.

12) En déduire, sans calcul de déterminant, le polynôme caractéristique de J.

D - Diagonalisation de $\mathcal{A}$

13) Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

14) Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$?

Exercice 3

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n + 1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x + 1$ et une chance sur deux de se trouver en $x - 1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.
Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;

2) sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.
Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1) Que représente la variable aléatoire S_n ?

2) Calculer p_0, p_1 et p_2.

3) Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

5) Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.

6) On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

7) Montrer que $R_p \geqslant 1$.

8) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right).$$

9) Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10) Calculer q_1 et q_2.

11) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geqslant 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

12) En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

13) En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

14) En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

15) En utilisant les questions 11 et 13, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

16) La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

FIN DE L'ÉPREUVE