# Épreuve de Mathématiques 7

Correction

---4

## Exercice 1 (PT 2020)

### Partie 1

**1)**

$$A^T A = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 64+16+1 & 0 & 0 \\ -8\times 4+7\times 4+4 & 81 & 0 \\ -8+16-8 & 0 & 81 \end{pmatrix} = I_n$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est orthogonale}}$$

**2)** **a)** La matrice $A$ est *symétrique réelle*, donc, d'après le théorème spectral, est elle diagonalisable. De plus

$$\boxed{\text{Ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux}}$$

*Ils vérifient aussi* $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)} E_\lambda$, *mais c'est équivalent à dire que* $A$ *est diagonalisable.*

**b)** Les valeurs propres réelles possibles d'une matrice orthogonale sont

$$\boxed{-1 \quad \text{et} \quad 1}$$

**c)** La matrice $A$ est diagonalisable, donc ses valeurs propres sont réelles, et valent 1 ou $-1$ d'après la question précédente.

Il reste donc 3 possibilités pour $\mathrm{Sp}\,(A)$ :

- $\mathrm{Sp}\,(A) = \{1\}$ : $\lambda = 1$ est valeur propre de multiplicité 3.
- $\mathrm{Sp}\,(A) = \{-1, 1\}$ : il y a deux valeurs propres.
- $\mathrm{Sp}\,(A) = \{-1\}$ : $\lambda = -1$ est valeur propre de multiplicité 3.

Dans le premier cas, comme $A$ est diagonalisable, il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PI_3P^{-1} = I_3$. Or $A \neq I_3$. Donc ce cas est exclu.

De même, le dernier cas est aussi exclu : $A \neq -I_3$.

Donc 1 et $-1$ sont valeurs propres.

$\underline{E_1 = \mathrm{Ker}\,(I_3 - A)}$ : *Attention au* $\frac{1}{9}$ *!!*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 17 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 17 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1 \iff \begin{pmatrix}17&-4&-1\\-4&2&-4\\-1&-4&17\end{pmatrix}X=0$$

$$\iff \begin{cases}17x-4y-z=0 & L_1\longleftarrow L_1+8L_2\\-2x+y-2z=0\\-x-4y+17z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x+4y-17z=0\\-2x+y-2z=0 & L_2\longleftarrow L_2+2L_1\\-x-4y+17z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x+4y-17z=0\\9y-36z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x+16z-17z=0\\y-4z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x-z=0\\y-4z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=z\\y=4z\end{cases}$$

$$\iff X=\begin{pmatrix}z\\4z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff X\in \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_1=\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}}$$

$\underline{E_{-1}=\text{Ker}\,(-I_3-A)}$ : *Vu les calculs pour $E_1$, on pouvait choisir de refaire les calculs pour $E_{-1}$, pour vérifier qu'on obtient bien $E_1^\perp$.*

Comme $A$ est diagonalisable, $E=E_1\oplus E_{-1}$. De plus, les sous-espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux, donc $E_{-1}=E_1^\perp$.

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-1}\iff \langle X,\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\rangle=0$$

$$\iff x+4y+z=0$$

$$\iff X=\begin{pmatrix}-4y-z\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4y\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff X\in\text{Vect}\,(\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix})$$

Conclusion :

$$\boxed{E_{-1}=\text{Vect}\,(\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix})}$$

**3)** L'endomorphisme $f$ est une symétrie ($A^2=A^TA=I_3$) orthogonale ($E_1\perp E_{-1}$) par rapport à la droite $E_1=\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$.

C'est donc aussi la rotation d'axe $E_1=\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ et d'angle $\pi$.

## Partie 2

**1)** L'application $u$ est inversible s'il existe $v\in\mathscr{L}(E)$ telle que $u\circ v=v\circ u=\text{id}_E$. Ici, $u\circ u=\text{id}_E$ donc

$$\boxed{\text{L'application } u \text{ est inversible d'inverse elle-même}}$$

**2)** Par définition, $E_u^+ = \{x \in E \mid u(x) = x\}$ et $E_u^- = \{x \in E \mid u(x) = -x\}$.
Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} u(x_+) &= u\left(\frac{x+u(x)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(u(x) + u^2(x)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left(u(x) + x\right) \\ &= x_+ \end{aligned}$$

Donc $\boxed{x_+ \in E_u^+}$

$$\begin{aligned} u(x_-) &= u\left(\frac{x-u(x)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(u(x) - u^2(x)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left(u(x) - x\right) \\ &= -x_- \end{aligned}$$

Donc $\boxed{x_- \in E_u^-}$

**3)** <u>Montrons que $E = E_u^+ + E_u^-$</u> :

$$\begin{aligned} x \in E &\Longrightarrow x = \frac{x+u(x)}{2} + \frac{x-u(x)}{2} = x_+ + x_- \\ &\Longrightarrow x \in E_u^+ + E_u^- && \text{d'après 2)} \end{aligned}$$

Donc $E \subset E_u^+ + E_u^-$.
Or $E_u^+$ et $E_u^-$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, donc l'inclusion réciproque est immédiate.

$$E = E_u^+ + E_u^-$$

<u>Montrons que $E_u^+ \cap E_u^- = \{0\}$</u> :
$E_u^+$ et $E_u^-$ sont les sous-espaces propres pour les valeurs propres 1 et $-1$ respectivement, donc sont en somme directe d'après le cours :

$$E_u^+ \cap E_u^- = \{0\}$$

<u>Conclusion</u>

$$\boxed{E = E_u^+ \oplus E_u^-}$$

**4)** Une base de $E$ compatible avec la somme directe précédente est une base de vecteurs propres :

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable}}$$

**5)** $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $u$ soit une isométrie. Soit $x, y \in E_u^+ \times E_u^-$ :

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y)\rangle &= \langle x, y\rangle && \text{Car } u \text{ est une isométrie.} \\ &= \langle x, -y\rangle && \text{Par définition de } E_u^+ \text{ et } E_u^-. \\ &= -\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

Donc $2\langle x, y\rangle = 0$, donc $\langle x, y\rangle = 0$.
Ainsi, $E_u^+ \perp E_u^-$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $E_u^+ \perp E_u^-$. Soit $x \in E$.
D'après les calculs de la question 3),

$$u(x) = u(x_+ + x_-) = x_+ - x_-$$

Comme $E_u^+ \perp E_u^-$, le théorème de Pythagore s'écrit

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \|x_+ - x_-\|^2 \\ &= \|x_+\|^2 + \|x_-\|^2 \\ \|x\|^2 &= \|x_+ + x_-\|^2 \\ &= \|x_+\|^2 + \|x_-\|^2 \end{aligned}$$

Donc $\|u(x)\| = \|x\|$.
Ainsi, $u$ est une isométrie.
Conclusion :

$$\boxed{u \text{ est une isométrie si et seulement si } E_u^+ \perp E_u^-}$$

**Partie 3**

**1)**
- $F \subset \mathbb{R}^4$ par construction.
- Soit $u = (0,0,0,0)$. Comme $0-0-0+0=0$ et de même pour l'autre équation, $u = 0 \in F$. Ainsi,
$$F \neq \emptyset$$
- Soit $u_1 = (x,y,z,t)$ et $u_2 = (x',y',z',t') \in F$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda u_1 + u_2 \in F$ :
$$(\lambda x + x') - (\lambda y + y') - (\lambda z + z') + (\lambda t + t') = \lambda(x - y - z + t) + x' - y' - z' + t' = 0$$
et de même
$$2(\lambda x + x') - (\lambda z + z') - (\lambda t + t') = \lambda(2x - z - t) + 2x' - z' - t' = 0$$
Donc $\lambda u_1 + u_2 \in F$.

Ainsi,

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$$

*Il y avait au moins deux autres façon de montrer que $F$ était un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ :*
- *$F = \operatorname{Ker} \varphi$ avec $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par*
$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \qquad \varphi(X) = \begin{pmatrix} x - y - z + t \\ 2x - z - t \end{pmatrix} = MX \qquad \text{avec} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
- *Résoudre le système et trouver, par exemple, $F = \operatorname{Vect}((1,3,0,2),(0,-2,1,-1))$.*

**2)** Comme $1-1-1+1=0$ et $2-1-1=0$,

$$\boxed{\widetilde{u}_1 = (1,1,1,1) \in F}$$

Comme $\|\widetilde{u}_1\|^2 = 1+1+1+1 = 4$, on pose $u_1 = \dfrac{1}{2}\widetilde{u}_1$.
Cherchons les $\widetilde{u}_2 = (x,y,z,t) \in F$ orthogonaux à $\widetilde{u}_1$ :

$$\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2x - z - t = 0 \\ \langle \widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2x - z - t = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ x + y + z + t = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2y + z - 3t = 0 \\ 2y + 2z = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2y + z - 3t = 0 \\ z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y + z - t = -t \\ y = 3t \\ z = -3t \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -t \\ 3t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\widetilde{u}_2 = (-1,3,-3,1)$ convient, et $\dim F = 2$.
Comme $\|\widetilde{u}_2\|^2 = 1+9+9+1 = 20 = 4 \times 5$, on pose $u_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\widetilde{u}_2$. Conclusion :

$$\boxed{(u_1,u_2)=(\frac{1}{2}\widetilde{u}_1,\frac{1}{2\sqrt{5}}(-1,3,-3,1))\text{ est une base orthonormée de }F}$$

**3)** Comme $F=\operatorname{Vect}(u_1,u_2)$,

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_3\in F^\perp &\iff \forall v\in F,\ \langle\widetilde{u}_3,v\rangle=0\\ &\iff \langle\widetilde{u}_3,u_1\rangle=0 \quad\text{et}\quad \langle\widetilde{u}_3,u_2\rangle=0 \qquad\qquad \text{car } v=\lambda u_1+\mu u_2\\ &\iff 1-1-1+1=0 \quad\text{et}\quad -1-3+3+1=0\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\widetilde{u}_3=(1,-1,-1,1)\in F^\perp}$$

*Autre méthode :*

$$\widetilde{u}_3\in F^\perp \iff \forall v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in F,\ \langle\widetilde{u}_3,v\rangle=x-y-z+t=0$$

*Ce qui est vrai par définition de $F$.*

On pose $u_3=\dfrac{1}{\|\widetilde{u}_3\|}\widetilde{u}_3=\dfrac{1}{2}u_3$.

On cherche $\widetilde{u}_4=(x,y,z,t)$ orthogonal aux précédents.

*(une méthode consisterait à choisir un $e_4$ quelconque hors de $G=\operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3)$, puis appliquer le « pogs » : $\widetilde{u}_4=e_4-p_G(e_4)=e_4-\sum i=1^3\langle e_4,u_i\rangle u_i$).*

$$\begin{cases}\langle\widetilde{u}_1,\widetilde{u}_4\rangle=0\\ \langle\widetilde{u}_2,\widetilde{u}_4\rangle=0\\ \langle\widetilde{u}_3,\widetilde{u}_4\rangle=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x+y+z+t=0\\ -x+3y-3z+t=0 & L_2\longleftarrow L_2+L_1\\ x-y-z+t=0 & L_3\longleftarrow L_3-L_1\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x+y+z+t=0\\ 4y-2z+2t=0\\ -2y-2z=0\end{cases}$$

Conclusion :

$$\iff\begin{cases}x+y+z+t=0\\ 2y-z+t=0\\ y=-z\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=-3z\\ t=3z\\ y=-z\end{cases}$$

$$\iff X=z\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Avec } u_4=\frac{1}{2\sqrt{5}}(-3,-1,1,3),\ (u_1,u_2,u_3,u_4)\text{ est une base orthonormée de }\mathbb{R}^4}$$

**4)** *Il y a plusieurs façon de faire. On peut déterminer la projection orthogonale $p_F$ sur $F$ via $p_F(x)=\langle x,u_1\rangle u_1+\langle x,u_2\rangle u_2$, puis utiliser $s=2p_F-\mathrm{id}_E$. Ici le sujet pousse à utiliser un changement de base.*

La matrice $D$ de $s$ dans la base $\mathscr{B}'=(u_1,\dots,u_4)$ est

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

Et la matrice de passage $P$ de la base canonique $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est un matrice de passage entre base orthonormée, donc orthogonale, et vaut

$$P=\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\sqrt5&-1&\sqrt5&-3\\ \sqrt5&3&-\sqrt5&-1\\ \sqrt5&-3&-\sqrt5&1\\ \sqrt5&1&\sqrt5&3\end{pmatrix}\in\mathscr{O}_4(\mathbb{R})$$

La formule de changement de base s'écrit $M = PDP^{-1} = PDP^T$ :

$$\boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

*La matrice trouvée est bien symétrique, cf. le cours.*

**5)** Soit $H_4 = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ et $H_3 = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_4)$ : ce sont deux hyperplans, car engendrés par une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Pour $i \in \{3, 4\}$, notons $r_i$ la réflexion par rapport à $H_i$ et $D_i$ la matrice de $r_i$ dans $\mathscr{B}'$. Alors

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de $r_3 \circ r_4$ est la matrice $D$ de $s$ trouvée au 4.

Ainsi,

$$\boxed{s = r_3 \circ r_4}$$

### Partie 4

**1)** Notons $\mathcal{H}_{p_f}$ la propriété

Il existe $\ell$ réflexions $r_1, \ldots, r_\ell$ avec $\ell \leqslant p_f$ telles que $f = r_1 \circ r_2 ... \circ r_\ell$.

Par définition, $\dim F_f = n - p_f = n - 1$, donc ici $F_f$ est un hyperplan.

Notons $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(\lambda\,\mathrm{id}_E - f)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$.

Comme $f$ est une isométrie, $G = F_f^\perp$ est stable par $f$, et $\dim G = n - \dim F_f = p_f = 1$.

Soit $x \in G$ non nul : $G = \mathrm{Vect}\,(x)$. De plus, par stabilité de $G$, $f(x) \in G = \mathrm{Vect}\,(x)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Soit un tel $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme $f$ est une isométrie, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Or $x \notin F_f = E_1$, donc $\lambda = -1$ et $G \subset E_{-1}$. Or $\dim G + \dim F_f = \dim E$, donc $G = E_{-1}$.

Ainsi, $f$ est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan :

$$\boxed{\text{Le résultat } \mathcal{H}_{p_f} \text{ est vrai pour } p_f = 1}$$

**2)** Soit $k$ un entier fixé tel que $2 \leqslant k \leqslant n$ et supposons le résultat vrai si $p_f < k$. Soit $g$ une isométrie telle que $p_g = k$.

**a)** Montrer que $F_g^\perp \neq \{0\}$.

**b)** Soit $x_0 \in F_g^\perp$, $x_0 \neq 0$ et $y_0 = g(x_0)$. Montrer que $y_0 \neq x_0$ et $y_0 \in F_g^\perp$.

**c)** Soit $r$ la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(x_0 - y_0)^\perp$.
Montrer que $F_g \subset \mathrm{Vect}(x_0 - y_0)^\perp$. En déduire $F_g \subset F_r$ puis que $F_g \subset F_{r\circ g}$.

**d)** Montrer que $(x_0 - y_0) \perp (x_0 + y_0)$.
Calculer $r(x_0 - y_0)$ et $r(x_0 + y_0)$. En déduire $r(y_0) = x_0$.

**e)** Montrer que $p_{r\circ g} < p_g$.

**f)** En appliquant l'hypothèse de récurrence, à $r \circ g$, montrer que $g$ peut s'écrire comme composition de $\ell$ réflexions avec $\ell \leqslant k$.

## Exercice 2

### Partie 1

**1) a)** $A^T = M^T M^{TT} = M^T M = A$, donc $A$ est symétrique réelle. D'après le théorème spectral,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$$

**b)** **i)** $\boxed{AX = \lambda X}$

**ii)** Comme $\langle X, Y\rangle = X^T Y$,

$$\begin{aligned}\|MX\|^2 &= (MX)^T MX \\ &= X^T M^T MX \\ &= X^T AX \\ &= \lambda X^T X && \text{Car } AX = \lambda X \\ &= \lambda \|X\|^2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\|MX\|^2 = \lambda\|X\|^2}$$

**iii)** Comme $X$ est un vecteur propre, $X \neq 0$, et donc

$$\lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de } A \text{ sont positives}}$$

Si zéro est valeur propre, alors il existe un vecteur propre $X \neq 0$ tel que $AX = 0$, et $A$ n'est pas inversible.
Or $A = M^T M$ avec $M$ inversible, donc $\det A = (\det M)^2 \neq 0$.
Ainsi,

$$\boxed{\text{Zéro ne peut pas être valeur propre de } A}$$

**c)** D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $D$ matrice diagonale telles que

$$A = PDP^{-1}$$

En b), nous avons montré que les valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $A$ sont strictement positives.

Donc, en posant $\mu_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$, il vient $D = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n^2 \end{pmatrix}$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe } P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } (\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \text{ tels que } A = P \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n^2 \end{pmatrix} P^{-1}}$$

**d)** $S^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ avec $D^2 = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n^2 \end{pmatrix}$, donc, par construction,

$$\boxed{A = S^2}$$

De plus, comme $P \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$, $P^{-1} = P^T$. Ainsi, comme $D^T = D$ pour une matrice diagonale,

$$S^T = (PDP^T)^T = P^{TT} D^T P^T = PDP^{-1} = S$$

Conclusion :

$$\boxed{S \text{ est symétrique}}$$

**2)** **a)** $A = M^T M = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

**b)** Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) = \det(xI_3 - A) &= \begin{vmatrix} x-16 & 0 & 0 \\ 0 & x-10 & -6 \\ 0 & -6 & x-10 \end{vmatrix} \\ &= (x-16)\begin{vmatrix} x-10 & -6 \\ -6 & x-10 \end{vmatrix} \\ &= (x-16)(x-10)^2 - 6^2 \\ &= (x-16)^2(x-4) \end{aligned}$$

Tr $A = 36 = 16 + 16 + 4$, et toutes les valeurs propres sont positives conformément au résultat de la question 1)b)iii).

Valeurs propres :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \lambda = 16 \text{ de multiplicité } \alpha = 2 \\ \bullet\ \lambda = 4 \ \ \text{ de multiplicité } \alpha = 1 \end{array}}$$

Base orthonormée de vecteurs propres :

$E_4 = \text{Ker}\,(4I_3 - A)$ :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \iff \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} X = 0 \iff \begin{cases} -12x = 0 \\ -6y - 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \text{Vect}\,(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Comme $\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \|^2 = 1 + 1 = 2$, posons

$$\boxed{e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$E_{16} = \text{Ker}\,(16I_3 - A)$ : Les sous-espaces propresd'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux, et leur somme directe forme tout l'espace, donc

$$E_{16} = E_4^\perp$$

Ainsi, $\dim E_{16} = 3 - \dim E_4 = 2$. Il suffit de trouver 2 vecteurs orthogonaux à $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ unitaire pour obtenir une base orthonormée de $E_{16}$. Posons :

$$\boxed{e_2' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_3' = e_1' \wedge e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$$

$\langle e_1', e_2'\rangle = 0$, donc $e_2' \in E_{16}$. *(On cherche un vecteur $e_2'$ simple qui vérifie cette condition, par exemple parmi les vecteurs de la base canonique.)*
Par construction du produit vectoriel, $e_3'$ est orthogonal à $e_1'$ (donc dans $E_{16}$) et $(e_1', e_2', e_3')$ forme une base orthonormée directe. Ainsi, finalement,

$$\boxed{\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3') \text{ est une base orthonormée de vecteurs propres}}$$

**c)** Posons $D = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\-1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.
Par construction, $P \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ ($\mathscr{B}'$ base orthonormée) et $A = PD^2P^{-1}$.
D'après 1d, la matrice suivante convient :

$$S = PDP^{-1} = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

**3)** **a)** $\det A = (\det M)^2 \neq 0$, et $\det A = (\det S)^2$, donc $\det S \neq 0$ :

$$\boxed{\text{La matrice } S \text{ est inversible}}$$

**b)** Vérifions que $U^TU = I_n$ *(Si les résultats de tous les calculs étaient évident, ils perdraient de leur utilité : il faut se lancer, on verra bien.)*

$$\begin{aligned}
U^TU &= (MS^{-1})^T MS^{-1} \\
&= (S^{-1})^T M^T M S^{-1} && \text{Or } M^TM = S^2 \text{ par construction, et } (B^{-1})^T = (B^T)^{-1} \\
&= (S^T)^{-1} S^2 S^{-1} && \text{Or } S \text{ est symétrique} \\
&= S^{-1}S^2S^{-1} \\
&= I_n
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La matrice } U = MS^{-1} \text{ est une matrice orthogonale}}$$

**c)** Par construction, $U = MS^{-1}$, donc $US = M$ :

$$\boxed{\text{Les matrices } U \text{ et } S \text{ que nous venons de construire sont une décomposition polaire de } M}$$

**4)** Un pivot de Gauss nous donne $S^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}$

D'où $U = MS^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
La décomposition polaire de $M$ est

$$\boxed{U = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}}$$

## Partie 2

**1)** $\boxed{|||I_n||| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|X\|}{\|X\|} = 1}$

**2)** **a)**

- Montrons que $\|X\|_\infty \leqslant \|X\|$ : Il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\|X\|_\infty = |x_{i_0}|$, donc

$$\|X\|_\infty^2 = x_{i_0}^2 \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|X\|^2$$

Conclusion :

$$\boxed{\|X\|_\infty \leqslant \|X\|}$$

- Montrons que $\|X\| \leqslant \sqrt{n}\|X\|_\infty$ : Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| \leqslant \|X\|_\infty$, donc, en sommant,

$$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \|X\|_\infty^2 = n\|X\|_\infty^2$$

Conclusion :

$$\boxed{\|X\| \leqslant \sqrt{n}\|X\|_\infty}$$

- Montrons que $\|MX\|_\infty \leqslant n\|M\|_\infty\|X\|_\infty$ :

Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = MX$, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n]\!], \qquad |y_i| &= \left| \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j \right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \times |x_j| && \text{Or } |m_{ij}| \leqslant \|M\|_\infty \text{ et } |x_j| \leqslant \|X\|_\infty \\ &\leqslant \sum_{j=1}^n \|M\|_\infty\|X\|_\infty = n\|M\|_\infty\|X\|_\infty \end{aligned}$$

En passant au sup sur $i$, $\|Y\|_\infty \leqslant n\|M\|_\infty\|X\|_\infty$ :

$$\boxed{\|MX\|_\infty \leqslant n\|M\|_\infty\|X\|_\infty}$$

**b)** D'après a), il vient

$$\begin{aligned} \|MX\| &\leqslant \sqrt{n}\|MX\|_\infty \\ &\leqslant n\sqrt{n}\|X\|_\infty \\ &\leqslant n\sqrt{n}\|X\| \end{aligned}$$

**c)** Par définition, $|||M||| = \sup\left\{ \dfrac{\|MX\|}{\|X\|} \mid X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$.

Or, d'après 2b, pour tout $X \neq 0$, $\left\{ \dfrac{\|MX\|}{\|X\|} \mid X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} \subset [0, n\sqrt{n}\|M\|_\infty]$.

Donc la borne supérieure cherchée existe et est inférieure à $n\sqrt{n}\|M\|_\infty$ :

$$\boxed{|||M||| \in \mathbb{R}}$$

**3)** Pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a $\dfrac{\|MX\|}{\|X\|} \leqslant \sup_{Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|MY\|}{\|Y\|} = |||M|||$ par définition de la borne supérieure.

En multipliant par $\|X\|$ il vient $\|MX\| \leqslant |||M|||\ \|X\|$, qui est vrai aussi en $X = 0$. Conclusion :

$$\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \|MX\| \leqslant |||M|||\ \|X\|}$$

**4)** **a)** Comme $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|PX\|^2 = X^T P^T P X = X^T X = \|X\|^2$ donc

$$\boxed{X \mapsto PX \text{ est une isométrie de } \mathbb{R}^n \text{ et } |||P||| = 1}$$

**b)** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
|||MP||| &= \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MPX\|}{\|X\|} \\
&= \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MPX\|}{\|PX\|} && \text{(car } \|PX\| = \|X\|\text{)} \\
&= \sup_{Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MY\|}{\|Y\|} && \text{(car } X \mapsto Y = PX \text{ est une bijection de } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ sur } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\text{)} \\
&= |||M|||
\end{aligned}$$

**5)** **a)** $D$ diagonale donc $\boxed{De_i = \lambda_i e_i}$

**b)** Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\|DX\|^2 &= \|\sum_{i=1}^n (x_i De_i)\|^2 \\
&= \|\sum_{i=1}^n (x_i \lambda_i e_i)\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i \lambda_i)^2 && \text{(car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est une base orthonormée)} \\
&\leqslant \rho(D)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 && \text{(car } \lambda_i^2 \leqslant \rho(D)^2 \text{ pour tout } i\text{)} \\
&\leqslant \rho(D)^2 \|X\|^2
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|DX\| \leqslant \rho(D)\|X\|.}$

**c)** Par conséquent, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|DX\|}{\|X\|} \leqslant \rho(D)$. En passant au sup, il vient $\boxed{|||D||| \leqslant \rho(D)}$

Si $i_0$ est tel que $|\lambda_{i_0}| = \rho(D)$, alors d'après a) $De_{i_0} = \lambda_{i_0} e_{i_0}$.

Donc $\|De_{i_0}\| = |\lambda_{i_0}|\|e_{i_0}\| = \rho(D)\|e_{i_0}\|$. Ainsi, pour $X = e_{i_0}$, $\dfrac{\|DX\|}{\|X\|} = \rho(D)$. D'où $|||D||| \geqslant \rho(D)$.

Conclusion :

$$\boxed{|||D||| = \rho(D)}$$

**6)** **a)** La matrice ${}^tMM$ est symétrique donc diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale, et par une démarche identique à celle de la question 1d de la partie 1, toute ses valeurs propres sont positives – on peut donc les écrire sous forme de carrés.

$\boxed{\text{Il existe } P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } D \text{ une matrice diagonale à coefficients positifs tels que } {}^tMM = PD^2\,{}^tP}$

**b)** D'après les questions 4c et 3 ([1]), la matrice $P^{-1} = {}^tP$ étant orthogonale,

$$\rho(D) = |||D||| = |||D^tP|||$$

Or, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\|D^tPX\|^2 = {}^tXP^tDDPX = {}^tX(PD^{2t}P)X = {}^tX^tMMX = \|MX\|^2$$

Par conséquent $|||D^tP||| = |||M|||$.

Conclusion : $\boxed{|||M||| = \rho(D)}$

1. On prend $P^{-1} = {}^tP$ et non $P$ pour des raisons de changement de base : $D$ « vit » dans la base $\mathscr{B}'$ de diagonalisation, et $P$ prend « en entrée » du $\mathscr{B}'$, donc le produit $DP$ n'a pas vraiment de sens vu le contexte (bien que les tailles de matrices ne posent pas problème).

**7)** Il faut calculer $\rho(D)$, c'est-à-dire la racine carré de la plus grande valeur propre de ${}^tMM = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det({}^tMM - \lambda I_2) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}\,({}^tMM)\lambda + \det({}^tMM) = \lambda^2 - 6\lambda + 4$$

a pour racines $3 \pm \sqrt{5}$. Ainsi

$$\boxed{|||M||| = \sqrt{3 + \sqrt{5}}}$$

**FIN DE L'ÉPREUVE**