Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'utilisation d'effaceurs chimiques ou de « vernis » de masquage est interdite. Tous les textes sont obligatoirement écrits à l'encre bleue foncée ou noire. L'usage du crayon à papier est interdit. D'autres couleurs peuvent être utilisées dans les schémas ou pour améliorer la présentation. Il est interdit de coller, couper les copies et adjoindre des brouillons.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Dans tout le problème, l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F pour ce produit scalaire.

Si E est un espace vectoriel de dimension n , on appelle hyperplan un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Partie 1

Soit A la matrice définie par

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que la matrice A est orthogonale.
- 2)
 - a) Justifier que A est diagonalisable. Que dire de ses espaces propres ?
 - b) Rappeler quelles sont les valeurs propres réelles possibles d'une matrice orthogonale.
 - c) A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
- 3) Caractériser l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A .

Partie 2

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit u un endomorphisme de E tel que $u \circ u = \text{id}_E$. Nous notons $E_u^+ = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $E_u^- = \text{Ker}(u + \text{id}_E)$.

- 1) Montrer que u est inversible et préciser son inverse.
- 2) Pour tout $x \in E$, on pose

$$x_+ = \frac{x + u(x)}{2} \text{ et } x_- = \frac{x - u(x)}{2}.$$

Montrer que $x_+ \in E_u^+$ et $x_- \in E_u^-$.

- 3) Montrer que $E = E_u^+ \oplus E_u^-$.
- 4) Montrer que u est diagonalisable.
- 5) Montrer que u est une isométrie si et seulement si $E_u^+ \perp E_u^-$.

Partie 3

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y - z + t = 0, 2x - z - t = 0\}.$$

- 1) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
- 2) Vérifier que $\tilde{u}_1 = (1, 1, 1, 1) \in F$.
Déterminer une base orthonormale (u_1, u_2) de F où u_1 est un vecteur colinéaire à $\tilde{u}_1$.
- 3) Vérifier que $\tilde{u}_3 = (1, -1, -1, 1) \in F^\perp$.
Compléter la base précédente en une base orthonormale (u_1, u_2, u_3, u_4) de $\mathbb{R}^4$ en choisissant u_3 colinéaire à $\tilde{u}_3$.
- 4) On note s la symétrie orthogonale par rapport à F . Écrire la matrice de s dans la base canonique.
- 5) On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.
Écrire la symétrie s comme composée de deux réflexions (on pourra se placer dans une base adaptée à s).

Partie 4

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Soit f une isométrie de E . On note F_f l'ensemble des points fixes de f soit $F_f = \{x \in E, f(x) = x\}$ et

$$p_f = n - \dim F_f.$$

On veut montrer que par récurrence sur p_f que l'on peut trouver ℓ réflexions $r_1, r_2, \dots, r_\ell$ avec $\ell \leq p_f$ telles que

$$f = r_1 \circ r_2 \dots \circ r_\ell.$$

- 1) Montrer que le résultat est vrai pour $p_f = 1$.
- 2) Soit k un entier fixé tel que $2 \leq k \leq n$ et supposons le résultat vrai si $p_f < k$. Soit g une isométrie telle que $p_g = k$.
 - a) Montrer que $F_g^\perp \neq \{0\}$.
 - b) Soit $x_0 \in F_g^\perp$, $x_0 \neq 0$ et $y_0 = g(x_0)$. Montrer que $y_0 \neq x_0$ et $y_0 \in F_g^\perp$.
 - c) Soit r la réflexion par rapport à $\text{Vect}(x_0 - y_0)^\perp$.
Montrer que $F_g \subset \text{Vect}(x_0 - y_0)^\perp$. En déduire $F_g \subset F_r$ puis que $F_g \subset F_{r \circ g}$.
 - d) Montrer que $(x_0 - y_0) \perp (x_0 + y_0)$.
Calculer $r(x_0 - y_0)$ et $r(x_0 + y_0)$. En déduire $r(y_0) = x_0$.
 - e) Montrer que $p_{r \circ g} < p_g$.
 - f) En appliquant l'hypothèse de récurrence, à $r \circ g$, montrer que g peut s'écrire comme composition de ℓ réflexions avec $\ell \leq k$.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = X^T Y$.

Partie 1

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et S symétrique, telles que

$$M = US$$

Une telle décomposition $M = US$ est appelée décomposition polaire de M .

- 1) Soit $A = M^T M$.

- a) Montrer que A est diagonalisable.
- b) Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .
- i) Rappeler la relation liant A , X et λ .
 - ii) Calculer $\|MX\|^2$ en fonction de $\|X\|^2$ et de λ .
 - iii) En déduire que toutes les valeurs propres de A sont positives.
Zéro peut-il être valeur propre de A ?
- c) En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ des réels strictement positifs tels que

$$A = P \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

- d) Soit $S = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\mu_1, \dots, \mu_n$.
Montrer que $A = S^2$ et que S est symétrique. .

- 2) Étude d'un exemple. Dans cette question uniquement, $n = 3$ et

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer $A = M^T M$.
 - b) Déterminer les valeurs propres de A , et une base orthonormée de vecteurs propres.
 - c) Construire une matrice S symétrique telle que $S^2 = A$. On pourra utiliser la question 1d.
- 3) Retour au cas général : désormais, $n \geq 1$ est quelconque et M aussi. Soit S la matrice construite au 1d.
- a) Montrer que S est inversible.
 - b) Montrer que $U = MS^{-1}$ est une matrice orthogonale.
 - c) Montrer que les matrices U et S que nous venons de construire sont une décomposition polaire de M .
- 4) Déterminer la décomposition polaire de la matrice M de la question 2.

Partie 2

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous posons,

$$\|M\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MX\|}{\|X\|}$$

- 1) Calculer $\|I_n\|$.
- 2) Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $\|M\|$ est finie :
 - a) Soit $X = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Notons $\|X\|_\infty = \sup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$ et $\|M\|_\infty = \sup_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |m_{ij}|$. Montrer que

$$\|X\|_\infty \leq \|X\| \leq \sqrt{n} \|X\|_\infty \quad \text{et} \quad \|MX\|_\infty \leq n \|M\|_\infty \|X\|_\infty$$

- b) En déduire que

$$\|MX\| \leq n\sqrt{n} \|M\|_\infty \|X\|$$

- c) Montrer que $\|M\| \in \mathbb{R}$.

- 3) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|MX\| \leq \|M\| \|X\|$.
- 4) Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

- a) Que peut-on dire de l'endomorphisme $X \mapsto PX$ de $\mathbb{R}^n$? Calculer $\|P\|$.
- b) Montrer que $\|MP\| = \|M\|$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 5) Soit D une matrice diagonale de coefficients diagonaux $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Notons

$$\rho(D) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

- a) Que vaut De_i ?
- b) Par un calcul de $\|DX\|^2$, en déduire que, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|DX\| \leq \rho(D)\|X\|$.
- c) En déduire que $\|D\| \leq \rho(D)$, puis que $\|D\| = \rho(D)$.
- 6) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- a) En s'inspirant de la question 1d de la partie 1, montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients positifs tels que $M^T M = PD^2 P^T$.
- b) À l'aide des questions 4b et 5c, en déduire que $\rho(D) = \|M\|$.
- 7) Considérons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\|M\|$.

FIN DE L'ÉPREUVE