Épreuve de Mathématiques 6

Correction

Exercice 1 (E3A PC 2025 – corrigé du jury)

1) J est une matrice de rang 1 et $\mathrm{Im}\,(J) = \mathrm{Vect}(C_1)$ où C_1 est la première colonne de la matrice J.

2) D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}\,(J)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est dans $\mathrm{Ker}\,(J)$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$ qui est l'équation de $\mathrm{Ker}\,(J)$.

On en déduit que $X \in \mathrm{Ker}\,(J) \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1} \end{pmatrix}$, ce qui donne comme base de $\mathrm{Ker}\,(J)$ la famille : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ldots, V_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3) La matrice J est symétrique réelle donc, diagonalisable.

4) 0 est valeur propre d'ordre $n-1$ et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Ker}\,(J)$.
La deuxième (et dernière) valeur propre est $\mathbf{tr}(J) = n$ et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}(C_1)$ car $JC_1 = nC_1$.
On en déduit alors que $D = \mathrm{diag}(0, ..., 0, n)$ en utilisant la base $(V_1, \ldots, V_{n-1}, C_1)$.

5) On peut remarquer que le produit scalaire d'un vecteur de base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ avec C_1 est nul, donc $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont orthogonaux. D'après le théorème du rang, ils sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$.

6) On a $M_r = rJ + (1-r)I_n \in \mathrm{Vect}(I_n, J)$.

7) La matrice M_r est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisque symétrique réelle. Comme J est diagonalisable, il existe P inversible telle que $J = PDP^{-1}$. Donc

$$M_r = rPDP^{-1} + (1-r)PP^{-1} = P(rD + (1-r)I_n)P^{-1}$$

La matrice M_r est donc semblable à la matrice $\Delta_r = \mathrm{diag}(1-r, ..., 1-r, (n-1)r+1)$.
Remarque : si on a choisi $D = \mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$, on a $\Delta_r = \mathrm{diag}((n-1)r+1, 1-r, \ldots, 1-r)$.

8) Pour tout couple (X, Y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose $f_r(X, Y) = X^\top M_r Y$.

a) Prenons $Y, Z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$f_r(X, \lambda Y + Z) = X^\top M_r(\lambda Y + Z) = \lambda X^\top M_r Y + X^\top M_r Z = \lambda f_r(X, Y) + f_r(X, Z)$$

De plus, $X^\top$ est de taille $1 \times n$, M_r de taille $n \times n$ et Y de taille $n \times 1$, donc $X^\top M_r Y$ est de taille 1×1 et est un réel.
Donc $Y \mapsto f_r(X, Y)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

b) Soit $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Comme une matrice de taille 1 est égale à sa transposée, $f_r(X,Y) = X^\top M_r Y = (X^\top M_r Y)^\top = Y^\top M_r X = f_r(Y,X)$ car M_r est symétrique.

c) D'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que

$$M_r = P^\top \Delta_r P$$

Pour $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $f_r(X,Y) = X^\top(P^\top \Delta_r P)Y = X'\Delta_r Y'$, avec $X' = PX$ et $Y' = PY$.

d) D'après les questions précédentes, f_r est une forme bilinéaire symétrique, donc elle définit un produit scalaire si et seulement si elle est définie positive. Prenons alors $X \in \mathbb{R}^n$ et notons $(x_1,\dots,x_n)$ les composantes de X'.

On a donc $f_r(X,X) = (1-r)\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 + ((n-1)r+1)x_n^2$. Ainsi, f_r définit un produit scalaire si et seulement si $1-r>0$ et $(n-1)r+1>0$, autrement dit si et seulement si $-\dfrac{1}{n-1} < r < 1$.

Exercice 2 (E3A PC 2025 – corrigé du jury)

1) Z peut prendre toutes les valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z=k) = p(1-p)^{k-1}$. De plus, $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

2) X_1 et X_2 sont indépendantes si pour tout $A \subset X_1(\Omega)$ et $B \subset X_2(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A)$ et $(X_2 \in B)$ sont indépendants. De façon équivalente, X_1 et X_2 sont indépendantes si pour tout $x \in X_1(\Omega)$ et tout $y \in X_2(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_1 = x, X_2 = y) = \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_2 = y)$.

3)
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} pq^n\\
&= pq^k \frac{1}{1-q} \qquad \text{car } q \in]0,1[
\end{aligned}$$

Donc on a bien $\mathbb{P}(X \geqslant k) = q^k$.

4) **a)** Comme X et Y prennent des valeurs dans $\mathbb{N}$, $X+Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

b) Pour tout entier naturel n :

$(X+Y=n) = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} ((X=i) \cap (Y=n-i))$.

Ainsi, par indépendance : $\mathbb{P}(X+Y=n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=n-i) = \sum_{i=0}^{n} pq^i pq^{n-i} = (n+1)p^2q^n$.

c) **i)** Comme

$$\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X=k) = \frac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathbb{P}(X=k, Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

si $k>n$, $(Y=n-k)$ est impossible, donc $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X=k) = 0$.

ii) Si $k \in [\![0,n]\!], \mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X=k) = \dfrac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \dfrac{1}{n+1}$ d'après la question précédente. On pose donc $r_n = \dfrac{1}{n+1}$ qui convient.

5) On pose $V = Y - X$ et $M = \min(X,Y)$.

a) V prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ et M prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{P}(M \geqslant k) = \mathbb{P}(X \geqslant k, Y \geqslant k)$.
Or $\mathbb{P}(X \geqslant k) = q^k$ et de même $\mathbb{P}(Y \geqslant k) = q^k$ car X et Y ont même loi.
D'où $\mathbb{P}(M \geqslant k) = q^{2k}$.

c) On en déduit la loi de la variable aléatoire M :
pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \geqslant k) - \mathbb{P}(M \geqslant k+1) = q^{2k}(1 - q^2)$.

d) Commençons par remarquer que $(V \geqslant 0) = (Y \geqslant X) = (M = X)$.
— Si $r \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M = k, V = r) &= \mathbb{P}(X = k, Y - X = r)\\ &= \mathbb{P}(X = k, Y = k + r)\\ &= \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k + r)\\ &= p^2 q^{2k+r}\end{aligned}$$

par indépendance.
— Si $r < 0$, de même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M = k, V = r) &= \mathbb{P}(Y = k, X = k - r)\\ &= \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(X = k - r)\\ &= p^2 q^{2k-r}\end{aligned}$$

En conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(M = k, V = r) = p^2 q^{2k+|r|}}$

e) La loi de V est donc une loi marginale du couple (M, V) donnée, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, par :
$\mathbb{P}(V = r) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p^2 q^{2k+|r|} = p^2 q^{|r|} \frac{1}{1 - q^2}$.

f) Avec les questions précédentes, on trouve que pour tout $r \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(M = k)\mathbb{P}(V = r) = \mathbb{P}(M = k, V = r)$ donc les deux variables aléatoires M et V sont indépendantes.

Exercice 3 (CCINP MPI 2025)

1) *C'est une question classique. Comme pour toute suite, on peut commencer par déterminer les premiers termes. Une fois les valeurs (du degré et du terme dominant) conjecturée, prouver les formules par récurrence.*
Ici, on trouve $\deg P_0 = 0$, $\deg P_1 = 1$,

$$\begin{aligned}&P_2 = 2XP_1 - P_0 = 2X^2 - 1 && a_2 = 2\\ &P_3 = 2XP_2 - P_1 = 4X^3 - 2X - X = 4X^3 - 3X && a_3 = 4\\ &P_4 = 2XP_3 - P_2 = 2X(4X^3 - 3X) - (2x^2 - 1) = 8X^4 + Q(X) && a_4 = 8\end{aligned}$$

On conjecture $\deg P_n = n$ *et* $a_n = 2^{n-1}$ *pour* $n \geqslant 1$.

Notons a_n le coefficient dominant de P_n. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \deg P_n = n \quad \text{et} \quad a_n = 2^{n-1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: est vraie car $P_1 = X$ de degré 1 et terme dominant $a_n = 1$.
- $\underline{\mathcal{H}_2}$: est vraie car $P_2 = 2X^2 - 1$ de degré 2 et terme dominant $a_n = 2$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n-1}$ vraies pour un certain $n \geqslant 2$:
  $P_n = 2^{n-1}X^n + Q$ avec $\deg Q < n$ et $\deg P_{n-1} = n - 1$.

  $$\begin{aligned}P_{n+1} &= 2XP_n - P_{n-1}\\ &= 2X^n + 2XQ + P_{n-1}\end{aligned}$$

  Comme $\deg(2XQ + P_{n-1}) < n + 1$, $\deg P_{n+1} = n + 1$ et $a_{n+1} = 2^n$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad \deg P_n = n \text{ et son terme dominant est } 2^{n-1}X^n}$

Pour $n = 0$, $P_0 = 1$ est de degré 0 et de terme dominant 1.

Vous avez besoin d'informations sur P_n *et* P_{n-1}*, donc il vous faut* $\mathcal{H}_n$ *et* $\mathcal{H}_{n-1}$ *: c'est une récurrence forte. Il faut donc* $\mathcal{H}_2$ *aussi.*

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad P_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta).$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $P_0 = 1$ et $\cos(0) = 1$ donc $P_0(\cos\theta) = \cos(0 \times \theta)$. Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $P_1(\cos\theta) = \cos(\theta) = \cos(1 \times \theta)$. Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n-1}$ vraies.

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\cos\theta) &= 2\cos(\theta)P_n(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) && (\mathcal{H}_n \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{n-1}) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - [\cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta)] && \textit{formules de trigo : savoir qu'elles existent et savoir les retrouver.} \\ &= \cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)}$

3) Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. La fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue donc continue par morceaux sur $]-1,1[$.
Étude en $t = 1$: Soit $t = 1-h$.

$$f(1-h) = \frac{P(1-h)Q(1-h)}{\sqrt{1-(1-h)^2}} \qquad \text{Or } 1-(1-h)^2 = 1-(1-2h+h^2) = 2h - h^2 \sim 2h$$

$$f(1-h) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}P(1-h)Q(1-h)\frac{1}{\sqrt{h}}$$

Par continuité de $t \mapsto P(t)Q(t)$ en 1,

$$P(1-h)Q(1-h) \sim P(1)Q(1) \qquad \text{ou} \qquad P(1-h)Q(1-h) = o(1)$$

selon que $P(1)Q(1) \neq 0$ ou $= 0$. D'où $f(1-h) \sim \dfrac{K}{h^{1/2}}$ ou $f(1-h) = o(\dfrac{1}{h^{1/2}})$.
Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{h^{1/2}}\mathrm{d}h$ converge (Riemann, $\alpha = 1/2 < 1$).
Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^1 f(1-h)\mathrm{d}h$ converge absolument donc converge.
Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ converge en 1.
Étude en $t = -1$: Soit $t = -1+h$. L'étude est identique, par parité de $t \mapsto 1/\sqrt{1-t^2}$.

$$f(-1+h) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}P(-1+h)Q(-1+h)\frac{1}{\sqrt{h}}$$

Par continuité de $t \mapsto P(t)Q(t)$ en -1, $f(-1+h) \sim \dfrac{K}{h^{1/2}}$ ou $f(1-h) = o(\dfrac{1}{h^{1/2}})$.
Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{h^{1/2}}\mathrm{d}h$ converge (Riemann, $\alpha = 1/2 < 1$).
Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^1 f(-1+h)\mathrm{d}h$ converge absolument donc converge.
Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ converge en -1.
Conclusion :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

4) Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

- Symétrie : $\langle .,. \rangle$ est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (P,Q) \in E^2, \qquad \langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$$

- Bilinéarité : Soient $P_1, P_2, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle \lambda P_1 + P_2, Q\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{[\lambda P_1(t) + P_2(t)]Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t. \\ &= \lambda \int_{-1}^{1} \frac{P_1(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \frac{P_2(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda\langle P_1, Q\rangle + \langle P_2, Q\rangle\end{aligned}$$

Donc $\langle ., Q\rangle$ linéaire, et, par symétrie, $\langle .,. \rangle$ bilinéaire.

- Positivité : Soit $P \in E$, par positivité de l'intégrale,

$$\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}}_{\geqslant 0} \mathrm{d}t \geqslant 0$$

Donc $\langle .,. \rangle$ positif.

- Caractère défini positif : Soit $P \in E$ tel que $\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 0$.

  La fonction $f : t \mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ vérifie
  - f continue sur $I =]-1, 1[$;
  - $f \geqslant 0$;
  - $\int_I f = 0$

  Donc, d'après le théorème de l'intégrale nulle, $f = 0$ sur $]-1, 1[$:

$$\forall t \in]-1, 1[, \qquad \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0$$

  Donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in]-1, 1[$. Ainsi, P a une infinité de racines (tous les $t \in]-1, 1[$).
  Donc $P = 0$.
  Par conséquent, $\langle .,. \rangle$ est défini positif.

Conclusion :

$$\boxed{\langle .,. \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X] \text{ donc sur } \mathbb{R}_k[X]}$$

5) Soit $n, m \in \mathbb{N}^2$.*Formules de trigo, le retour.*

$$2\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)$$

Or, pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\int_0^{\pi} \cos(k\theta)\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{k}\sin(k\theta)\right]_0^{\pi} = 0$$

D'où,

$$\boxed{\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases}}$$

6) Montrons que $(P_n)_{n\in[\![0,k]\!]}$ est une famille orthogonale : soient $n, m \in [\![0,k]\!]^2$. En posant $t = \cos(\theta)$, $\mathrm{d}t = -\sin(\theta)\mathrm{d}\theta$, et le changement de bornes

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \end{cases} \text{donne} \begin{cases} \theta = \pi \\ \theta = 0 \end{cases}$$

La fonction $\theta \mapsto \cos\theta$ est $\mathscr{C}^1$, strictement décroissante, donc bijective de $]0,\pi[$ dans $]-1,1[$. Le théorème de changement de variable affirme que les deux intégrales suivantes sont de même nature (convergente d'après 4) et

$$\begin{aligned} \langle P_n, P_m\rangle &= \int_0^1 \frac{P_n(t)P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\pi^0 P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\frac{-\sin\theta}{|\sin\theta|}\mathrm{d}\theta && \text{Or, sur } [0,\pi],\ \sin\theta \geqslant 0 \\ &= \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{d}\theta && \text{d'après 2} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $(P_n)_{n\in[\![0,k]\!]}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$.
En considérant la famille $(\frac{1}{\sqrt{\pi}}P_n)_{n\in[\![0,k]\!]}$, on a

$$\forall n, m \qquad \langle P_n, P_m\rangle = \delta_{n,m}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{La famille } (\frac{1}{\sqrt{\pi}}P_n)_{n\in[\![0,k]\!]} \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_k[X] \text{ pour ce produit scalaire}}$$

Exercice 4 (CCINP MPI 2025)

1) Montrons que

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \qquad \ln(1+x) \leqslant x$$

Soit $\varphi(x) = \ln(1+x) - x$ pour $x \in I =]-1,+\infty[$.

$$\forall x \in I, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$$

D'où le tableau de variations

x	-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

D'où $\varphi \leqslant 0$ sur I, et l'inégalité voulue.
Comme $x_k > 0$ pour tout k, et donc $m > 0$ aussi, on peut appliquer l'inégalité précédente avec $x = x_k/m - 1 \in I$:

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leqslant \frac{x_k}{m} - 1$$

En sommant sur k, il vient

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{m} - 1\right)}$$

2) Simplifions les expressions précédentes :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) - n\ln(m) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) - n\ln(m)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - n = n - n = 0$$

Ainsi, d'après 1,

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) - n\ln(m) \leqslant 0$$

$$\implies \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \ln(m)$$

$$\implies \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant m \qquad \text{Par croissance de l'exponentielle}$$

Conclusion :

$$\boxed{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.}$$

3) $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Alors les deux termes de l'inégalité valent x_1, et sont donc égaux.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = m$, c'est-à-dire, en prenant le logarithme,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) = 0$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k/m \in]0, 1]$, donc les $\ln(x_k/m)$ sont tous de même signe – négatif. Ainsi,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) = 0$$

D'où $x_k = m$ pour tout k, et donc

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{L'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si, } x_1 = x_2 = \cdots = x_n.}$$

4) D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $B = PDP^{-1}$.
De plus B définie positive, donc $\mathrm{Sp}\,(B) \subset \mathbb{R}_+^*$: les valeurs propres, coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de D, sont strictement positives.
Or det et Tr sont invariants par changements de base :

$$\det B = \det D = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}\ B = \mathrm{Tr}\ D = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

En appliquant le résultat de la question 2 avec $x_k = \lambda_k > 0$ pour tout k, il vient

$$\boxed{\left(\det(B)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(B)}$$

D'après la question 3, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$, ce qui signifie $D \in \mathrm{Vect}\,(I_n)$.
Or $D = \lambda I_n$ entraîne $B = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda I_n$, et réciproquement. D'où

$$\boxed{\left(\det(B)\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(B) \text{ si et seulement si } B \in \mathrm{Vect}\,(I_n).}$$

5) Par définition de $S_n^{++}(\mathbb{R})$,

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq 0, \qquad X^\top AX > 0$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Notons $X = E_i$ le vecteur colonne avec un 1 à la i-ème ligne, et 0 ailleurs. Alors, par calcul matriciel,

$$E_i^\top AE_i = E_i^\top \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{ii}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad a_{i,i} > 0}$$

6) Comme $B^\top = D^\top A^\top D^\top = B$, B est symétrique réelle. Soit $X \in \mathbb{R}^2$ non nul,

$$\begin{aligned} X^\top BX &= (DX)^\top A(DX) \\ &= Y^\top AY && \text{avec} \quad Y = DX \neq 0 \\ &> 0 && \text{car} \quad A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{B \in S_n^{++}(\mathbb{R})}$$

D'après la question 4, $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ entraîne $\left(\det(B)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(B)$.

Or $\det(B) = \det(A)(\det(D))^2 = \det(A) \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{-1}$.

Et, en notant $A = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \cdots & C_n \end{array} \right)$, on a $AD^2 = \left(\begin{array}{c|c|c} \dfrac{1}{a_{11}}C_1 & \cdots & \dfrac{1}{a_{nn}}C_n \end{array} \right)$. D'où

$$\mathrm{Tr}\,(B) = \mathrm{Tr}\,(D(AD)) = \mathrm{Tr}\,(AD^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ii}}{a_{ii}} = n$$

Donc l'inégalité précédente s'écrit

$$\left[\det(A) \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{-1}\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$$

Conclusion :

$$\boxed{\det(A) \leqslant a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n,n}}$$

S'il y a égalité dans l'inégalité précédente, on a $\left(\det(B)\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(B)$.
Or, d'après la question 4, celle-ci est vraie si et seulement si $B \in \mathrm{Vect}\,(I_n)$, i.e. $B = \lambda I_n$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ce qui entraîne $A = \lambda D^{-2}$ diagonale.
Réciproquement, si A est diagonale, alors $\det(A) = a_{11} \times \cdots \times a_{nn}$.
En conclusion :

$$\boxed{\text{Il y a égalité si et seulement si } A \text{ est diagonale}}$$