Épreuve de Mathématiques 6

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 (E3A)

Soient r un nombre réel, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et M_r la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & \cdots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \cdots & r & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors $A^\top \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de la matrice A. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : $(X|Y) = X^\top Y$. On note enfin J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

1) Déterminer une base de $\operatorname{Im}(J)$ et le rang de la matrice J.

2) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(J)$.

3) Prouver que la matrice J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4) Déterminer les sous-espaces propres de la matrice J et une matrice diagonale D semblable à J.

5) Démontrer que $\operatorname{Im}(J)$ et $\operatorname{Ker}(J)$ sont deux sous-espaces orthogonaux supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

6) Justifier que $M_r \in \operatorname{Vect}(I_n, J)$.

7) Vérifier que la matrice M_r est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice Δ_r diagonale semblable à M_r.

8) Pour tout couple (X,Y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose $f_r(X,Y) = X^\top M_r Y$.

  a) Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $Y \mapsto f_r(X,Y)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

  b) Montrer que : $\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, f_r(X,Y) = f_r(Y,X)$.

c) Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, orthogonale, telle que :

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, f_r(X,Y) = (X')^\top \Delta_r Y'$$

où l'on a posé $X' = PX$ et $Y' = PY$.

On ne déterminera pas la matrice P.

d) Déterminer les valeurs de r pour lesquelles l'application f_r définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 (E3A)

Questions de cours

1) Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
Rappeler la loi de Z, son espérance et sa variance.

2) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

*****

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et telles que :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- il existe $p \in]0,1[$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ avec $q = 1 - p$.

3) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $P(X \geqslant k) = q^k$.

4) **Étude de la variable aléatoire $X + Y$**

4.1. Dans quel ensemble la variable aléatoire $X + Y$ prend-elle ses valeurs ?

4.2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

4.3. Soient n et k deux entiers naturels.

4.3.1. Lorsque $k > n$, calculer $P_{(X+Y=n)}(X = k)$.

4.3.2. On prend $k \leqslant n$. Démontrer qu'il existe un scalaire r_n tel que : $P_{(X+Y=n)}(X = k) = r_n$.

5) On pose $V = Y - X$ et $M = \min(X, Y)$ où $\min(a, b)$ désigne le plus petit des deux réels a et b.

5.1. Dans quels ensembles les variables aléatoires V et M prennent-elles leurs valeurs ?

5.2. Calculer, pour tout entier naturel k, la valeur de $P(M \geqslant k)$.

5.3. En déduire la loi de la variable aléatoire M.

5.4. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$. Calculer la probabilité de l'évènement $(M = k) \cap (V = r)$.
On pourra distinguer les deux cas $r < 0$ et $r \geqslant 0$.

5.5. En déduire la loi de V.

5.6. Étudier l'indépendance des deux variables aléatoires M et V.

Exercice 3

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

1) Déterminer par récurrence le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n.

2) Justifier que pour tout réel θ :

$$P_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta).$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.$$

3) Justifier la convergence de cette intégrale.

4) Démontrer que $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).

5) Calculer pour n et m entiers naturels, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{d}\theta$.

6) Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 4

n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On se donne des réels strictement positifs notés $x_1, \dots, x_n$ et on pose :

$$m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

On désigne par $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre n.

1) Démontrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\Big(\frac{x_k}{m}\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{x_k}{m} - 1\Big).$$

2) En déduire l'inégalité :

$$\Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

3) Établir que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

4) Dans cette question B désigne une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Démontrer l'inégalité :

$$\big(\det(B)\big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(B),$$

et établir que c'est une égalité si, et seulement si, $B \in \operatorname{Vect}(I_n)$.

Désormais $A = (a_{i,j})$ désigne une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

5) Démontrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a : $a_{i,i} > 0$.

6) On pose $D = \operatorname{diag}\Big(\frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \frac{1}{\sqrt{a_{2,2}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{n,n}}}\Big)$ et $B = DAD$. Démontrer que $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et en déduire que :

$$\det(A) \leqslant a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n,n}$$

avec égalité si, et seulement si, A est diagonale.

FIN DE L'ÉPREUVE