Épreuve de Mathématiques 6

Correction

Exercice 1 (CCINP 2024 PC)
Partie I - Étude d'un exemple

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

1) Déterminons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(xI_3 - A) \\ &= \begin{vmatrix} x-4 & 12 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x-4)(x-5) - 12 \\ &= x - 9x + 8 \\ &= (x-1)(x-8) \qquad \text{(racines évidentes)} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\chi_A(x) = (x-1)(x-8)}$$

La matrice A de taille $n = 2$ possède $n = 2$ valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable :

$$\boxed{\text{Il existe } P \in GL_2(\mathbb{R}), \text{ telle que } A = PDP^{-1}, \text{ avec } D = \operatorname{diag}(1, 8)}$$

2) Soit $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$, $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\Delta \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B = P\Delta P^{-1}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A : $B^3 = A = PDP^{-1}$.
Alors $\Delta^3 = P^{-1}B^3P = D$. Donc Δ est une racine cubique de D.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\Delta \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une racine cubique de D.
Alors $B^3 = P\Delta^3P^{-1} = PDP^{-1} = A$. Donc B est une racine cubique de A.

Conclusion :

$$\boxed{B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est une racine cubique de } A \text{ si et seulement si } P^{-1}BP \text{ est une racine cubique de } D.}$$

3) Comme $\Delta^3 = D$, $\Delta D = \Delta^4 = D\Delta$. Ainsi

$$\boxed{\text{Les matrices } D \text{ et } \Delta \text{ commutent}}$$

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. L'égalité $DeltaD = D\Delta$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 8b & 8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 8c \\ b & 8d \end{pmatrix}$$

D'où $b = c = 0$:

$$\boxed{\text{La matrice } \Delta \text{ est diagonale}}$$

4) Ainsi, avec les notations de la question précédente, $\Delta^3 = D$ équivaut à $a^3 = 1$ et $d^3 = 8$. c'est-à-dire $a = 1$ et $d = 8$. Ainsi,

$$\boxed{\text{L'ensemble des racines cubiques de } D \text{ est } \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}}$$

Comme B est racine cubique de A si et seulement si Δ est racine cubique de D (question 2),

$$\boxed{\text{L'ensemble des racines cubiques de } D \text{ est } \left\{P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}\right\}}$$

Partie II - Dans un plan euclidien

5) L'endomorphisme u est la rotation d'angle θ et de centre 0.

6) Si u_θ est la rotation d'angle θ (de matrice M) et $u_{\theta'}$ la rotation d'angle $\theta'\mathbb{R}$, alors $u_\theta \circ u_{\theta'}$ est la rotation d'angle $\theta + \theta'$ (produit matriciel et formules de trigonométrie).
Ainsi,

$$\boxed{\text{La matrice } M = \begin{pmatrix} \cos(\theta/3) & -\sin(\theta/3) \\ \sin(\theta/3) & \cos(\theta/3) \end{pmatrix} \text{ de la rotation d'angle } \frac{\theta}{3} \text{ est une racine cubique de } M}$$

7) D'après le cours, une matrice orthogonale de déterminant -1 est une symétrie orthogonale [1]. Donc $N^2 = I_2$, par conséquent

$$\boxed{\text{La matrice } N \text{ admet une racine cubique : } N^3 = N}$$

Partie III - Racines cubiques et diagonalisation

8) Soit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\mu^3 = \lambda$ (unique car $t \mapsto t^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

$$\boxed{\text{La matrice } \mu I_p \text{ est une racine cubique de } H_p(\lambda) = \lambda I_p}$$

9) Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, notons $p_i = \dim E_{\lambda_i}$ la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i pour la matrice A.
Comme A est diagonalisable par hypothèse, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_d I_{p_d} \end{pmatrix} P^{-1}$$

1. Ce sont exactement les symétries orthogonale de spectre $\{-1, 1\}$, donc par rapport à une droite. La preuve est dans le cours.

Or, d'après la question précédente, $\begin{pmatrix} \lambda_1^{1/3} I_{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_d^{1/3} I_{p_d} \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_d I_{p_d} \end{pmatrix}$.

En notant $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/3} I_{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_d^{1/3} I_{p_d} \end{pmatrix}$, après changement de base, il vient

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ admet une racine cubique, } P\Delta P^{-1}}$$

10) Par propriété d'une valeur propre, 0 est valeur propre si et seulement si $0I_n - A$ n'est pas inversible, c'est-à-dire A non inversible.

Par contraposition, A inversible entraîne $0 \notin \mathrm{Sp}\,(A)$:

$$\boxed{\text{Les nombres } \lambda_1, \ldots, \lambda_d \text{ sont non nuls}}$$

11) Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, $P = X^3 - \lambda$ admet 3 solutions (avec multiplicité).

Or $P' = 3X^2$ a pour unique racine 0, qui n'est pas racine de P (car $\rho \neq 0$) : toutes les racines de P sont simples. Ainsi,

$$\boxed{\text{L'équation } z^3 = \lambda \text{ admet exactement trois solutions dans } \mathbb{C}}$$

L'énoncé nous incitait à être explicite : soit $j = e^{2i\pi/3}$ et $\mu = \rho^{1/3} e^{i\theta/3}$. Alors,

$$\forall k \in [\![0, 2]\!], \qquad (j^k \mu)^3 = e^{2ik\pi} \rho e^{i\theta} = \lambda$$

De plus, comme $\rho \neq 0$ et 1, j et j^2 sont 2 à 2 distincts, $z^3 = \lambda$ admet exactement 3 solutions.

12) Soit $k \in [\![1, d]\!]$. D'après la question 10, $\lambda_k \neq 0$. Donc, d'après la question précédente, $X^3 - \lambda_k$ est scindé à racines simples.

Soit $k, k' \in [\![1, d]\!]$. Soit μ_k soit une racine de $X^3 - \lambda_k$, et $\mu_{k'}$ une racine de $X^3 - \lambda_{k'}$.

Si $\mu_k = \mu_{k'}$, alors $\mu_k^3 = \lambda_k = \lambda_{k'}$. Comme les $(\lambda_i)_i$ sont deux à deux distincts, $k = k'$.

Donc, si $k \neq k'$, les racines de $X^3 - \lambda_k$ et $X^3 - \lambda_{k'}$ sont deux ensembles disjoints : Q a exactement $3d$ racines. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le polynôme } Q \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{C}}$$

13) D'après les théorème de diagonalisable, si A est diagonalisable, alors $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A. De plus, $Q = P(X^3)$.

Soit B une racine cubique de A. Par définition, $B^3 = A$, donc

$$Q(B) = P(B^3) = P(A) = 0$$

Ainsi, Q, polynôme scindé à racines simples (question 12) est un polynôme annulateur de B : par théorème de diagonalisation, B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{Toute racine cubique de } A \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$$

Par contre, B ne sera pas forcément diagonalisable dans $\mathbb{R}$: si $A = -I_2$, et B la matrice de la rotation d'angle $\pi/3$, $B^3 = A$. Et pourtant, B n'est pas diagonalisable (matrice A_5 de l'exercice 3 de la feuille réduction).

Exercice 2 (CCINP 2024 MPI)

1) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} X^\top AX &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} \\ &= x(2x+y) + y(x+y) \\ &= 2x^2 + 2xy + y^2 \\ &= x^2 + (x+y)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

De plus, comme $x^2 + (x+y)^2$ est une somme de termes positifs,

$$X^\top AX = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \Longrightarrow X = 0$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{La matrice } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est définie positive.}}$$

2) $\mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. Via l'encadrement de $\langle AX, X \rangle$ (question de cours). *cf.* cours.

3) *Une question du type « il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$ » mais sans expliciter x_0 : TVI, ou la version théorème de la bijection.*

La fonction P est polynomiale donc dérivable, et $P'(x) = 3X^2 - 12X + 9 = 3(X^2 - 4X + 3)$.
Racines évidentes de P' : $x = 1$ et $x = 3$. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$P'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Comme P est continue et change de signe sur chacun des intervalle $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$, d'après les théorème des valeurs intermédiaires, P admet une racine réelle sur chacun de ces intervalles :

$$\boxed{\text{Le polynôme } P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3 \text{ admet trois racines réelles distinctes}}$$

4) *Le sujet nous incite fortement à ne pas chercher de forme factorisée de χ_B : utilisons Sarrus.*

D'après la formule de Sarrus,

$$\begin{aligned} \chi_B(x) = \det(xI_3 - B) &\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x-2)(x-3) + 0 + 0 - (x-2) - (x-1) - 0 \\ &= x^3 - 6x^2 + (2+3+6)x - 6 - 2x + 3 \\ &= P(x) \end{aligned}$$

Comme $P(0) = -3$, le tableau de variation précédent prouve que les racines de χ_B sont dans $\mathbb{R}_+^*$: avec la caractérisation de al question 2,

$$\boxed{\text{La matrice } B\text{, symétrique, est définie positive}}$$

5) Soit $M \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après la caractérisation spectrale, $\mathrm{Sp}\,(M) \subset \mathbb{R}_+^*$. Or la trace est la somme des valeurs propres (avec multiplicité) et le déterminant le produit des valeurs propres (idem). Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(M) > 0 \quad \text{et} \quad \det(M) > 0}$$

6) Soit λ et μ les valeurs propres de $M \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, éventuellement identiques.
Alors $\mathrm{Tr}\,(M) = \lambda + \mu$ et $\det(M) = \lambda\mu$.
Si $\det(M) > 0$, alors λ et μ sont non nuls de même signe.
Comme $\mathrm{Tr}\,(M) > 0$, ce signe ne peut être négatif : λ et μ sont strictement positives.
Donc, d'après la caractérisation spectrale, $M \in \mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Un matrice } M \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \text{ de trace et de déterminant strictement positifs, est définie positive}}$$

7) La matrice $M = \mathrm{diag}\,(-1, -1, 4)$ a pour déterminant $4 > 0$ et trace $2 > 0$, mais n'est pas définie positive (par caractérisation spectrale).

$$\boxed{\text{Le résultat de la question précédente n'est plus vrai pour } \mathscr{S}_3(\mathbb{R})}$$

8) Notons 0_p le vecteur colonne nul de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, pour $p \in \mathbb{N}^*$.
Si $k = n$, $X = X_k$ convient.
Si $k \in [\![1, n-1]\!]$, posons $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k} \end{pmatrix}$. Soient des matrices B, C, D telles que

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M_k & C \\ \hline B & D \end{array}\right)$$

Alors

$$\begin{aligned}
X^\top M X &= \begin{pmatrix} X_k^\top & 0_{n-k}^\top \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} M_k & C \\ \hline B & D \end{array}\right) \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X_k^\top & 0_{n-k}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k X_k + C 0_{n-k} \\ B X_k + D 0_{n-k} \end{pmatrix} \\
&= X_k^\top M_k X_k + 0_{n-k}^\top B X_k \\
&= X_k^\top M_k X_k
\end{aligned}$$

Un calcul bloc se passe comme un calcul avec des coefficients normaux, mais en étant très précis : pas de précipitation, bien écrire $X_k^\top$ quand on transpose, ne pas changer l'ordre.

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k} \end{pmatrix} \text{ convient}}$$

9) Soit $M \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Pour tout $X_k \in \mathbb{R}^k$ non nul, on choisit $X \in \mathbb{R}^n$ comme ci-dessus (donc non nul). Alors, comme M est définie positive,

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X > 0$$

Donc M_k est aussi définie positive. Ainsi, $\mathrm{Sp}\,(M_k) \subset \mathbb{R}_+^*$, et, par conséquent, $\det M_k > 0$.
Donc tous les mineurs principaux de M sont strictement positifs. Finalement,

$$\boxed{\text{Toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.}}$$

10) *Un peu d'analyse synthèse : on cherche V tel que $M_{n-1}V = U$...*
Si M_{n-1} est définie positive, alors elle est inversible ($0 \notin \mathrm{Sp}\,(M_{n-1})$). Posons

$$\boxed{V = -M_{n-1}^{-1}U}$$

Alors $M_{n-1}V + U = -M_{n-1}M_{n-1}^{-1}U + U = 0$. Donc le vecteur V qui précède convient.

$$\begin{aligned}
Q^\top MQ &= \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} + U0 & M_{n-1}V + U \\ U^\top + \alpha 0 & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} && \text{Or } M_{n-1}V + U = 0_{n-1,1} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top M_{n-1} + U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} && \text{Or } (M_{n-1}V + U)^\top = 0_{1,n-1} \\
&= \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & U^\top V + \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\beta = U^\top V + \alpha > 0$. Calculons $\det(M)$:

$$\det(Q^\top MQ) = \det(M_{n-1})\beta$$

car c'est une matrice diagonale blocs. De plus, M_{n-1} est définie positive, donc, d'après la question 5, $\det(M_{n-1}) > 0$. Ainsi, $\det(Q^\top MQ)$ est du signe de β. Or

$$\det(Q^\top MQ) = \det(Q^\top)\det(M)\det(Q) = \det(Q)^2\det(M)$$

La matrice Q est triangulaire blocs, donc $\det(Q) = \det(I_{n-1}) \times 1 = 1$. Ainsi,

$$\det(M) = \det(M_{n-1})\beta$$

Par conséquent, $\det(M) > 0$ entraîne $\beta > 0$:

$$\boxed{Q^\top MQ \text{ s'écrit par blocs } \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \text{ avec } \beta > 0}$$

11) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \text{« } \forall M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ M \text{ vérifie le critère de Sylvester} \Longrightarrow M \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: Une matrice 1×1 est définie positive si et seulement si c'est un réel positif. Et ce réel est égal à son déterminant. Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_{n-1} \Longrightarrow \mathcal{H}_n}$: Supposons $\mathcal{H}_{n-1}$ vraie pour un $n \geqslant 2$. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester :

  $$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \det(M_k) > 0$$

  En particulier, M s'écrit par bloc comme à la question 10 ci-dessus, et $\mathcal{H}_{n-1}$ appliquée à M_{n-1} nous donne M_{n-1} définie positive.

On peut donc appliquer le résultat : avec la matrice $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et le $\beta > 0$ de la question 10,

$$M' = Q^\top M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$$

Comme M' est diagonale blocs, $\chi_{M'}(x) = (x-\beta)\chi_{M_{n-1}}(x)$. Ainsi, $\mathrm{Sp}\,(M') = \{\beta\} \cup \mathrm{Sp}\,(M_{n-1})$. Or $\mathrm{Sp}\,(M_{n-1}) \subset \mathbb{R}_+^*$ car M_{n-1} définie positive et $\beta > 0$. Donc $\mathrm{Sp}\,(M') \subset \mathbb{R}_+^*$ et

$$M' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Or $\det Q = 1 \neq 0$, donc Q inversible, et $M = (Q^{-1})^\top M' Q^{-1}$. Puis,

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq 0, \quad X^\top M X &= X^\top (Q^{-1})^\top M' Q^{-1} X \\ &= (Q^{-1}X)^\top M' (Q^{-1}X) \\ &= Y^\top M' Y && \text{avec } Y = Q^{-1}X \\ &> 0 && \text{car } M' \text{ définie positive et } Y = 0 \iff X = 0 \end{aligned}$$

Donc M est définie positive. En conclusion, $\mathcal{H}_n$ est vraie.

- Conclusion :

$$\boxed{\text{Toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.}}$$

12) Appliquons le critère de Sylvester : $C(x)^\top = C(x)$, $\det M_1 = |2| = 2 > 0$, $\det(M_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$.

$$\begin{aligned} \det C(x) &= 2 + 0 + 0 - 0 - 2x^2 - 1 && \text{Sarrus} \\ &= -2x^2 + 1 \end{aligned}$$

Ce déterminant est donc strictement positif si et seulement si $x \in]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$. Finalement,

$$\boxed{\text{La matrice } C(x) \text{ est définie positive si et seulement si } x \in]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[}$$

13) Considérons le mineur $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \det M_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} && \begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \\ &= (2 - 3 \times 3) \times 1 && \text{matrice triangulaire blocs} \end{aligned}$$

Donc $\det(M_3) < 0$. D'après le critère de Sylvester (contraposée),

$$\boxed{\text{La matrice considérée n'est pas définie positive}}$$

14) *Cette question était déroutante car vous n'avez pas manipulé l'écriture $q(x,y,z) = X^\top AX$ comme fonction de x, y et z. Au brouillon on écrit $A = (a_{ij})_{ij}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et*

$$X^\top AX = X^\top \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}x_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_jx_i = a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots$$

puis on conjecture A en identifiant a_{ij} dans l'expression :

$$4x^2+y^2+z^2+2xy-3xz = 4x^2+xy-\frac{3}{2}xz+yx+y^2-\frac{3}{2}zx+z^2$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$X^\top AX = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x+y-3/2z \\ x+y \\ -3/2x+z \end{pmatrix} = 4x^2+y^2+z^2+2xy-3xz$$

Or, $A^\top = A$, $\det M_1 = 4 > 0$, $\det M_2 = 4-1 = 5 > 0$, et

$$\det A = 4+0+0-9/4-0-1 = 3/4 > 0$$

Donc, par le critère de Sylvester, A est symétrique définie positive. Alors, par définition,

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad X^\top AX = 4x^2+y^2+z^2+2xy-3xz > 0}$$

15) Soit $n \geqslant 2$. En développant par rapport à la première colonne,

$$\begin{aligned}
\det(S_{n+1}) &= \sqrt{3}\det(S_n) - \left|\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 1 & \sqrt{3} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{array}\right| \\
&= \sqrt{3}\det(S_n) - \left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & S_{n-1} & \\ * & & & \end{array}\right| \qquad \text{Matrice triangulaire blocs} \\
&= \sqrt{3}\det(S_n) - \det(S_{n-1})
\end{aligned}$$

En notant $u_n = \det(S_n)$, (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$. Après étude (cf PCSI, équation caractéristique, etc), on trouve

$$u_n = \cos(n\pi/6) + \sqrt{3}\sin(n\pi/6) = 2\cos\left((n-2)\frac{\pi}{6}\right)$$

Donc, les premières valeurs de $\det S_n = u_n$ sont $\sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, 1, 0$.
La matrice S_n est symétrique réelle, et le critère de Sylvester s'écrit $\det(S_k) > 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
Donc, d'après les valeurs précédentes, la dernière étant nulle,

$$\boxed{\text{La matrice } S_n \text{ est définie positive si et seulement si } n \in [\![1,4]\!]}$$

Une fois obtenue la formule de récurrence, on peut aussi calculer simplement u_3, u_4 et $u_5 = 0$, ce qui donne le résultat.

Exercice 3 (Mines Ponts 2024 – PC)

Soit $E = \mathbb{R}^n$.

Partie 1 (Matrices de Hadamard)

1 ▷ Pour $M = (1)$, on a $M^\top M = (1) = I_1$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Comme $\frac{1}{2} M^\top M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$, $\frac{1}{\sqrt{2}} M \in \mathscr{O}_2(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\boxed{M = (1) \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ sont des exemples de matrices de Hadamard}}$$

2 ▷ Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Soit H une matrice de Hadamard, et $(C_1, \dots, C_n)$ les vecteurs colonnes de $\frac{1}{\sqrt{n}} H$.

- Multiplier une colonne par -1 : Soit H' la matrice H où la j-ème colonne est remplacée par son opposée. Tous les coefficients de H' sont égaux à 1 ou -1, et la famille $(C_1, \dots, -C_j, \dots, C_n)$ est une base orthonormée : $\| -C_j \| = 1$, et pour tout $i \neq j$, $\langle C_i, -C_j \rangle = 0$.

  Donc H' est une matrice de Hadamard.
- Échanger deux colonnes : Soit H' la matrice H où les colonnes i et j ont été permutées. Alors la famille des vecteurs colonnes reste une base orthonormée (seul l'ordre a changé), et les coefficients sont égaux à 1 ou -1.

  Donc H' est une matrice de Hadamard.
- Lignes : Si $H' = H^T$, alors $\frac{1}{\sqrt{n}} H'$ est orthogonale et les coefficients de H' valent 1 ou -1. C'est donc une matrice de Hadamard.

  Ainsi, les opérations faites sur les colonnes peuvent être faites sur les lignes : on effectue les opérations sur les colonnes de H^T, puis on transpose la matrice H' obtenue.

Conclusion :

> Toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne d'une matrice de Hadamard par -1 ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes est encore une matrice de Hadamard.

3 ▷ Soit H est une matrice de Hadamard d'ordre n. Soit H' la matrice où chaque colonne C_j est multipliée par h_{1j}. D'après la question 2, H' est encore une matrice de Hadamard, et, par construction, les coefficients de la première ligne valent $h_{ij}^2 = 1$:

> S'il existe une matrice de Hadamard d'ordre n, alors il existe une matrice de Hadamard d'ordre n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1

Soit H une matrice d'Hadamard d'ordre $n \geqslant 2$, telle que les coefficients de la première ligne soient égaux à 1.

Notons L_1 et L_2 les deux premières lignes. Comme les lignes forment une famille orthogonale,

$$\langle L_1, L_2 \rangle = \sum_{j=1}^{n} h_{1j} h_{2_j} = \sum_{j=1}^{n} h_{2_j} = 0$$

Si on note $I_{2+} = \{ j \in [\![1, n]\!] \mid h_{2j} = +1 \}$, alors $I_{2-} = \{ j \in [\![1, n]\!] \mid h_{2j} = -1 \} = [\![1, n]\!] \setminus I_{2+}$, donc

$$\sum_{j=1}^{n} h_{2_j} = \operatorname{Card}(I_{2+}) - \operatorname{Card}(I_{2-}) = 2 \operatorname{Card}(I_{2+}) - n = 0$$

Ainsi, $\operatorname{Card}(I_{2+}) = n/2$. Or c'est un entier :

$$\boxed{\text{S'il existe un matrice de Hadamard d'ordre } n \geqslant 2 \text{ alors } n \text{ est pair}}$$

4 ▷ Soit $n \geqslant 4$. D'après la question 3, il existe une matrice de Hadamard dont les coefficients de la première ligne valent 1. Soit une telle matrice H.
Notons $I_{i+} = \{j \in [\![1,n]\!] \mid h_{ij} = +1\}$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
D'après les calculs de la question 3, pour tout $i \geqslant 2$, $\langle L_1, L_i\rangle = 0$ entraîne $\text{Card}\,(I_{i+}) = n/2$.
Comme $n \geqslant 4 > 2$, L_3 existe. Étudions $\langle L_2, L_3\rangle$: notons $S_1 = \sum_{j \in I_{2+}} h_{3j}$ et $S_2 = \sum_{j \notin I_{2+}} h_{3j}$.

$$\begin{aligned} \langle L_2, L_3\rangle &= \sum_{j\in[\![1,n]\!]} h_{2j}h_{3j} = \sum_{j\in I_{2+}} h_{3j} - \sum_{j\notin I_{2+}} h_{3j} = S_1 - S_2 = 0 \\ \text{Or } \langle L_1, L_3\rangle &= \sum_{j\in[\![1,n]\!]} h_{1j}h_{3j} = \sum_{j\in I_{2+}} h_{3j} + \sum_{j\notin I_{2+}} h_{3j} = S_1 + S_2 = 0 \end{aligned}$$

En résolvant le système obtenu, on trouve $S_1 = S_2 = 0$.
Donc il y a le même nombre de 1 et de -1 parmi les $(h_{3j})_{j\in I_{2+}}$: $\text{Card}\,(I_{2+})$ est pair.
Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Card}\,(I_{2+}) = 2p$, alors $n/2 = 2p$ entraîne $n = 4p$:

$$\boxed{\text{Si } H \text{ est une matrice de Hadamard d'ordre } n \text{ supérieur ou égal à 4 , alors } n \text{ est multiple de 4}}$$

Partie 2 (Quelques résultats sur les endomorphismes symétriques)
5 ▷ D'après le théorème spectral, f est autoadjoint donc il existe une base orthonormée de diagonalisation de f. Quitte à réordonner la base (qui reste orthonormée), on peut supposer que le vecteur e_i est associé à λ_i pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, où les λ_i ont été rangés par ordre croissant.
6 ▷ $\dim T_k = n - k + 1$. Donc,

$$\begin{aligned} \dim(S_k + T_k) &= \dim S_k + \dim T_k - \dim(S_k \cap T_k) \\ &= k + n - k + 1 - \dim(S_k \cap T_k) \end{aligned}$$

Or $S_k + T_k \subset \mathbb{R}^n$: $\dim(S_k + T_k) = n + 1 - \dim(S_k \cap T_k) \leqslant n$.
Ainsi, $\dim(S_k \cap T_k) \geqslant 1$:

$$\boxed{S_k \cap T_k \neq \{0\}}$$

7 ▷ *Il est question de $\langle x, f(x)\rangle$, d'inégalités et de valeur propre : établissons que $\langle x, f(x)\rangle = \sup_i \lambda_i x_i^2$. L'inégalité demandée ne semble pas une conséquence directe de la question de cours.*
Soit X le vecteur colonne de $x \in E$ dans la base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, et $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. Alors,

$$\begin{aligned} \langle x, f(x)\rangle &= \langle X, DX\rangle && \text{Car } \mathscr{B} \text{ est une base orthonormée} \\ &= \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \end{aligned}$$

Comme $S_k \cap T_k \subset S_k$, $\max_{x\in S_k\cap T_k, \|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle \leqslant \max_{x\in S_k, \|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle$.
Or $x \in T_k$ s'écrit $x = \sum_{i=k}^n x_i e_i$: pour $i < k$, $x_i = 0$. Ainsi,

$$\forall x \in T_k, \qquad \langle x, f(x)\rangle = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=k}^n x_i^2$$

Soit $x \in T_k$. Minorons $\langle x, f(x)\rangle$:

$$\begin{array}{lll} \forall i \in [\![k,n]\!], & \lambda_i \geqslant \lambda_k & \\ \Longrightarrow \forall i \in [\![k,n]\!], & \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_k x_i^2 & \text{car } x_i^2 \geqslant 0 \\ \Longrightarrow & \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_k \sum_{i=k}^{n} x_i^2 & \\ \Longrightarrow & \langle x, f(x)\rangle \geqslant \lambda_k \|x\|^2 & \end{array}$$

Donc, pour tout $x \in T_k \cap S_k$ tel que $\|x\| = 1$,

$$\langle x, f(x)\rangle \geqslant \lambda_k$$

En passant à la borne supérieure,

$$\boxed{\max_{x\in S_k,\|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle \geqslant \max_{x\in S_k\cap T_k,\|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle \geqslant \lambda_k.}$$

8 ▷ Par double inégalité :

$\boxed{\geqslant}$ L'inégalité précédente est vraie pour tout $S_k \in \pi_k$. En passant à la borne inférieure

$$\inf_{S_k\in\pi_k} \left(\max_{x\in S_k,\|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle \right) \geqslant \lambda_k$$

$\boxed{\leqslant}$ Comme $S = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \in \pi_k$, par définition de la borne inférieure,

$$\inf_{S_k\in\pi_k} \left(\max_{x\in S_k,\|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle \right) \leqslant \max_{x\in S,\|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle$$

Calculons ce maximum : de même que pour $x \in T_k$, pour $x \in S$ on a

$$\forall x \in S, \qquad \langle x, f(x)\rangle = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i^2 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=0}^{k} x_i^2$$

Donc, pour tout $x \in S$, $\langle x, f(x)\rangle \leqslant \lambda_k \|x\|^2$, et en passant au maximum,

$$\max_{x\in S,\|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle \leqslant \lambda_k$$

Donc $\displaystyle\inf_{S_k\in\pi_k} \left(\max_{x\in S_k,\|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle \right) \leqslant \max_{x\in S,\|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle \leqslant \lambda_k$.

Par double inégalité, il vient l'égalité, qui est atteinte pour $S_k = S$ et $x = e_k$, donc c'est un minimum :

$$\boxed{\lambda_k = \min_{S_k\in\pi_k} \left(\max_{x\in S_k,\|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle \right)}$$

9 ▷ *La première partie est très classique, vous aurez reconnu une question de cours.*

D'après le théorème spectral, M est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée : soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale telle que

$$M = PDP^{-1} = PDP^\top$$

Supposons de plus M positive. Alors, par critère spectral, les valeurs propres λ_i sont positives. Notons $D' = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Il vient

$$\begin{aligned} M &= PD'^2P^\top & \\ &= (PD')(PD')^\top & \text{Car } D'^\top = D' \\ &= B^\top B & \text{Avec } B = (PD')^\top \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est positive, alors il existe } B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } M = B^\top B}$$

Supposons que M admette une unique valeur propre strictement positive $\lambda = \lambda_1$ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire u.
Alors, avec les notations précédentes, les autres valeurs propres $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont différentes de λ (sous-espace propre de dimension 1) et négatives.
Montrons que $A = \lambda uu^\top - M$ est symétrique positive :

$$A^\top = \lambda u^{\top\top} u^\top - M^\top = A$$

Donc A est symétrique.
De plus, en reprenant $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^\top$, le premier vecteur colonne, C_1, de P est un vecteur propre de M pour la valeur propre λ.
Or le sous-espace propre de M pour la valeur propre λ est de dimension 1 : C_1 et u sont colinéaires. Comme ils sont de norme 1, $C_1 = u$ ou $C_1 = -u$. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $C_1 = \varepsilon u$.
Les vecteurs colonnes C_i de la matrice M forment une base orthonormée : pour tout $i > 1$, $C_i^\top u = 0$, donc

$$\begin{aligned} u^\top P &= u^\top \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^\top C_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon u^\top u & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} && \text{Car } u^\top u = \|u\|^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^\top u &= (u^\top P)^\top \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} P^\top A P &= \lambda P^\top uu^\top P - P^\top M P \\ &= \lambda \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - D \\ &= \lambda \operatorname{diag}(\varepsilon^2, 0, \dots, 0) - \operatorname{diag}(\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ &= \operatorname{diag}(0, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n) \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Sp}(A) = \{0, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$. Donc A est positive. D'après ci-dessus, il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$. En conclusion,

$$\boxed{\text{Il existe } B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } M = \lambda uu^\top - B^\top B}$$

Partie 3 (Caractérisation des MDE)

10 ▷ $P^\top = I_n^\top - \dfrac{1}{n} e^{\top\top} e^\top = P$ donc P est symétrique.

Montrons que $M = \dfrac{1}{n} ee^\top$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(e)$:

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{n^2} ee^\top ee^\top && \text{Or } e^\top e = n \\ &= \frac{1}{n} ee^\top = M \end{aligned}$$

Donc M est la matrice d'un projecteur. Comme M est symétrique, le projecteur est un projecteur orthogonal.

De plus, les colonnes de M sont toutes égales à $\dfrac{1}{n}e$, donc l'image de M est $\mathrm{Vect}\,(e)$: M est la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}\,(e)$.
La matrice $P = I_n - M$ est la matrice du projecteur sur $\mathrm{Ker}\, M$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, M$, donc du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}\,(e)^\perp$:

$$\boxed{P = I_n - \frac{1}{n}ee^\top \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ est la matrice du projecteur orthogonale sur } \mathrm{Vect}\,(e)^\perp}$$

11 ▷ Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Par définition,

$$\begin{aligned} d_{ij} &= d(A_i, A_j)^2 \\ &= \|x_i - x_j\|^2 \\ &= \|x_i\|^2 - 2\langle x_i, x_j\rangle + \|x_j\|^2 \\ &= \|x_i\|^2 - 2x_i^\top x_j + \|x_j\|^2 \end{aligned}$$

Notons $M = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \cdots & \cdots & \|x_1\|^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \|x_i\|^2 & \cdots & \cdots & \|x_i\|^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \|x_n\|^2 & \cdots & \cdots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $M = Ce^\top$ et

$$\begin{aligned} D &= (d_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \\ &= (\|x_i\|^2)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} - 2(x_i^\top x_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} + (\|x_j\|^2)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \\ &= M - 2M_A^\top M_A + M^\top \\ &= Ce^\top - 2M_A^\top M_A + eC^\top \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{D = Ce^\top - 2M_A^\top M_A + eC^\top}$$

- Comme P est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\,(e)^\perp$, $Pe = 0$, donc

$$T(D)e = -\frac{1}{2}PDPe = 0$$

- De plus, pour tout i, j, $d_{ij} = d(A_i, A_j)^2 = d_{ji}$ par symétrie de la distance. Donc $D \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, et comme $P \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, un calcul de $T(D)^\top$ donne

$$T(D) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

- De plus, $Pe = 0$ entraîne $PCe^\top P = PC(Pe)^\top = 0$, donc

$$T(D) = -\frac{1}{2}PDP = PM_A^\top M_A P = B^\top B \qquad \text{avec} \qquad B = M_A P$$

  Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x^\top B^\top B x = \|Bx\|^2 \geqslant 0$$

  Donc $T(D) = B^\top B$ est positive.

En conclusion,

$$\boxed{\text{Toute matrice } D \in \Delta_n \text{ vérifie } T(D) \in \Omega_n}$$

12 ▷ Soit $A = (a_{ij}) \in \Omega_n$. Comme A est symétrique positive, d'après la question 9, il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$. Soit un tel B, notons $x_1, \dots, x_n$ ses vecteurs colonnes, et A_i le point de coordonnée x_i. D'après les calculs de la question 11, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$

$$a_{ij} = x_i^\top x_j \qquad \text{et} \qquad [ea^\top]_{ij} = a_{ii}$$

Or $K(A) = ea^\top - 2A + ae^\top$. Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, il vient

$$\begin{aligned} [K(A)]_{ij} &= [ea^\top]_{ij} - 2a_{ij} + [ae^\top]_{ij} \\ &= a_{ii} - 2a_{ij} + a_{jj} \\ &= \|x_i\|^2 - 2x_i^\top x_j + \|x_j\|^2 \\ &= \|x_i - x_j\|^2 \\ &= d(A_i, A_j)^2 \end{aligned}$$

Donc $K(A) \in \Delta_n$:

$$\boxed{\forall A \in \Omega_n,\ K(A) \in \Delta_n}$$

13 ▷ Soit $A \in \Omega_n$. $Ae = 0$ donc $\operatorname{Vect}(e)$ est stable par A.
Or $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, donc $\operatorname{Vect}(e)^\perp$ est aussi stable par A.
Montrons que, pour tout $x \in \operatorname{Vect}(e) \oplus \operatorname{Vect}(e)^\perp = \mathbb{R}^n$, $T \circ K(A)x = Ax$.

- Comme P est la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(e)^\perp$,

$$\begin{aligned} T(K(A)) &= -\frac{1}{2}P\left(ea^\top + ae^\top - 2A\right)P \\ &= PAP & \text{car } Pe = 0 \end{aligned}$$

- Pour $x = e$, $Ae = 0$ par définition de Ω_n, et

$$PAPe = PA0 = 0$$

  Donc $PAPx = Ax$ pour tout $x \in \operatorname{Vect}(e)$.

- Pour $x \in \operatorname{Vect}(e)^\perp$, $Ax \in \operatorname{Vect}(e)^\perp$ d'après ci-dessus, et

$$\begin{aligned} PAPx &= PAx & \text{Car } P \text{ est une projection sur } \operatorname{Vect}(e)^\perp \\ &= Ax & \text{Car } Ax \in \operatorname{Vect}(e)^\perp \text{ aussi} \end{aligned}$$

Donc, par linéarité, $T(K(A))x = PAPx = Ax$ pour tout $x \in E$: $T \circ K(A) = A$, puis

$$\boxed{T \circ K = \operatorname{id}_{\Omega_n}}$$

14 ▷ Soit D une matrice symétrique d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $D \in \Delta_n$. Alors $T(D) \in \Omega_n$ d'après la question 11, donc

$$T(D) = -\frac{1}{2}PDP \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $-\frac{1}{2}PDP \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrons que $D \in \Delta_n$.

Comme D n'est pas encore dans Δ_n, on ne peut pas appliquer T (définie sur Δ_n) ou, a fortiori, les résultats des questions qui précèdent sur T.

Soit $A = PDP$,

$$\begin{aligned} A &= D - \frac{1}{n}De.e^T - \frac{1}{n}e.e^TD + \frac{1}{n^2}e.e^TDe.e^T \\ &= D - \frac{1}{n}\left(De.e^T - (De.e^T)^T\right) + \alpha e.e^T & \text{Avec } \alpha = \frac{1}{n^2}e^TDe \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Posons $A = (a_{ij})$, et $D = (d_{ij})$. Alors, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$a_{ij} = d_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(d_{ik} + d_{kj}) + \alpha$$

Avec $K(A) = ea^\top + ae^\top - 2A$, il vient

$$\begin{aligned}[K(A)]_{ij} &= a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij} \\ &= \underbrace{d_{ii} + d_{jj}}_{=0} - 2d_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(d_{ik} + d_{ki} + d_{jk} + d_{kj} - 2d_{ik} - 2d_{kj}) \\ &= -2d_{ij} && \text{Car } D \text{ symétrique}\end{aligned}$$

Donc $K(A) = -2D$, d'où $K\left(-\frac{1}{2}PDP\right) = D$.

Or $-\frac{1}{2}PDP \in \Omega_n$ car symétrique positive par hypothèse, et vérifiant $-\frac{1}{2}PDPe = 0$ $(Pe = 0)$. Donc, d'après la question 12

$$D = K\left(-\frac{1}{2}PDP\right) \in \Delta_n$$

Conclusion :

$$\boxed{D \text{ est MDE si et seulement si } -\frac{1}{2}PDP \text{ est positive}}$$

15 ▷ *Question de synthèse typique : les hypothèses rappellent deux questions précédentes, essayons de les appliquer.*
Soit M une matrice symétrique à coefficients positifs, non nulle et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre $\lambda > 0$ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre $\mathbf{e}$.
Alors, avec $u = 1/\sqrt{n}e$, M vérifie les hypothèses de la question 9, donc il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M = \frac{\lambda}{n}ee^\top - B^\top B$$

Montrons que $-\frac{1}{2}PMP \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (le 1/2 ne change rien) :

$$\begin{aligned}-PMP &= -\frac{\lambda}{n}Pee^\top P + PB^\top BP && \text{Or } Pe = 0 \text{ et } P^\top = P \\ &= (BP)^\top BP\end{aligned}$$

Or $A^\top A$ est symétrique positive [2] pour tout matrice A $(X^\top A^\top AX = \|AX\|^2 \geqslant 0)$. La matrice $-\frac{1}{2}PMP$ est donc symétrique positive, et, d'après la question 14

$$\boxed{M \text{ est MDE}}$$

Partie 4 (Spectre des MDE)

16 ▷ Soit $D = (d_{ij})$ une MDE. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d_{ii} = d(A_i, A_i)^2 = 0$. De plus les valeurs propres de D sont réelles (théorème spectral), donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \text{Tr } D = 0}$$

Il faut savoir chercher les questions faisables, dans un sujet.

2. Dans cette question, vous pouvez abréger ce qui est « élémentaire », vous n'avez plus à faire vos preuve auprès de la correctrice ou du correcteur : allez à l'essentiel.

17 ▷ D'après la question 11, D s'écrit

$$D = Ce^\top - 2M_A^\top M_A + eC^\top$$

Ainsi, pour tout $x \in \text{Vect}\,(e)^\perp$,

$$\begin{aligned} x^\top Dx &= x^\top Ce^\top x - 2x^\top M_A^\top M_A + x^\top eC^\top x & \text{Or } e^\top x = x^\top e = 0 \\ &= -2\|M_A x\|^2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \text{Vect}\,(e)^\perp, \quad x^\top Dx \leqslant 0.}$$

18 ▷ *Encore une question de synthèse : a priori, il n'y a pas de résultats sur λ_k dans le cours. Par contre, il y en a un dans l'énoncé.*

D'après le théorème de Courant-Fischer montré à la question 8,

$$\lambda_{n-1} = \min_{S \in \pi_{n-1}} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} \langle x, Dx \rangle \right)$$

Or $S = \text{Vect}\,(e)^\perp \in \pi_{n-1}$, et $\displaystyle\max_{x \in \text{Vect}\,(e)^\perp, \|x\|=1} x^\perp Dx \leqslant 0$ d'après la question 17. D'où

$$\boxed{\lambda_{n-1} = \min_{S \in \pi_{n-1}} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} x^\top Dx \right) \leqslant 0}$$

Supposons que D a deux valeurs propres strictement positives, λ_1 et λ_2. Notons E_μ le sous-espace propre pour la valeur propre $\mu \in \text{Sp}\,(D)$.
Alors $F = E_{\lambda_1} \oplus_\perp E_{\lambda_2}$ est un sous-espace vectoriel de dimension au moins 2. Pour $x = x_1 + x_2 \in F$ non nul,

$$x^\top Dx = (x_1 + x_2)^\top (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \|x_1\|^2 + \lambda_2 \|x_2\|^2 > 0$$

Or $\dim(F \cap \text{Vect}\,(e)^\perp) = \dim(F) + (n - \dim \text{Vect}\,(e)) - \dim(F + \text{Vect}\,(e)^\perp) \geqslant 2 - 1 = 1$.
En prenant $x \in F \cap \text{Vect}\,(e)^\perp$ non nul, on obtient donc une contradiction avec le résultat de la question 17.
Par l'absurde,

$$\boxed{D \text{ a exactement une valeur propre strictement positive}}$$

Partie 5 (Problème inverse pour les MDE)

19 ▷

- $D^\top = U^\top \Lambda^\top U^{\top\top} = D$ donc D symétrique.
- Par construction, $H = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & & \end{pmatrix}$.

  Ainsi, ΛH a pour première ligne $(\lambda_1 \cdots \lambda_1)$, et pour i-ème ligne, avec $i \geqslant 2$, des coefficients $\pm\lambda_i$.

  Donc la matrice $H^\top \Lambda H$ a des coefficients de la forme $\lambda_1 + \displaystyle\sum_{i=2}^n \pm\lambda_i$.

  Or les λ_i sont négatifs pour $i \geqslant 2$, donc

  $$\lambda_1 + \sum_{i=2}^n \pm\lambda_i \geqslant \lambda_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i = 0$$

  Donc $D = \dfrac{1}{n} H^\top DH$ est à coefficients positifs.

- Si on note $H = (h_{ij})_{ij}$, alors, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$[H^\top DH]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} h_{ki}\lambda_k h_{kj}$$

En particulier, $[H^\top DH]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} h_{ki}^2 \lambda_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$ Car $h_{ki} \in \{-1, 1\}$
Donc D est à diagonale nulle.

$$\boxed{D \text{ est symétrique, à coefficients positifs et à diagonale nulle}}$$

Par définition d'une matrice de Hadamard, $U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, donc $U^\top = U^{-1}$ et $D = U^{-1}\Lambda U$.
Ainsi $\operatorname{Sp}(D) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.
De plus, λ_1 est valeur propre de multiplicité 1 – elle est strictement positive, et les autres valeurs propres sont négatives ou nulles.
Donc le sous-espace propre de la valeur propre λ_1 est exactement de dimension 1.

$$\boxed{D \text{ a pour valeurs propres } \lambda_1, \ldots, \lambda_n\text{, avec } \lambda_1 \text{ d'espace propre de dimension 1}}$$

20 ▷ Comme les vecteurs colonnes de $U^\top$ forment une base orthonormée, et que sa première colonne est $\frac{1}{\sqrt{n}}e$,

$$Ue = \sqrt{n}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

Puis $\Lambda Ue = \lambda_1\sqrt{n}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, et comme la première colonne de $U^\top$ est $\frac{1}{\sqrt{n}}e$, il vient

$$De = \lambda_1\sqrt{n}U^\top\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \lambda_1 e$$

Donc e est vecteur propre de λ_1.
Donc D vérifie les hypothèses de la question 15 :

$$\boxed{D \text{ est MDE}}$$

21 ▷ Soit $H = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, qui est une matrice de Hadamard, et $\Lambda = \operatorname{diag}(5, -1, -2, -2)$. Alors, d'après la question 20,

$$\boxed{D = \frac{1}{2}H^\top\Lambda H \text{ est une matrice de distance euclidienne d'ordre 4 de spectre } \{5, -1, -2, -2\}}$$