Épreuve de Mathématiques 6

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 (Racine cubique d'une matrice)

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice A.

1) Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

2) Montrer qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si et seulement si $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D.

3) Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D. Montrer que les matrices D et Δ commutent, puis en déduire que la matrice Δ est diagonale.

4) Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D, puis l'ensemble des racines cubiques de A. On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ.

Partie II - Dans un plan euclidien

Dans cette partie, on considère un plan euclidien orienté E muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$. On fixe également un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et on note :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

5) Quelle est la nature de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M ?

6) En déduire une racine cubique de la matrice M.

7) Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de déterminant -1 . Montrer que N admet une racine cubique.

Partie III - Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de la matrice A.

III. 1 - Existence d'une racine cubique polynomiale

8) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

9) Déduire de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique. On pourra remarquer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme $H_p(\lambda)$ avec $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

III. 2 - Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d} \left(X^3 - \lambda_k \right)$$

10) Montrer que les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont non nuls.

11) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous la forme $\lambda = \rho \mathbf{e}^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement trois solutions.

12) En déduire que le polynôme Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

13) Déduire des questions précédentes que si B est une racine cubique de A, alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2 (Type CCINP)

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul n, une matrice symétrique $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si :

$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top M X > 0.$$

1) Démontrer, en utilisant directement la définition précédente, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive.

Caractérisation spectrale

2) Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.

3) Démontrer que le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

4) Démontrer alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

On *ne* cherchera *pas* une forme factorisée du polynôme caractéristique.

Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

5) Démontrer qu'une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $\mathrm{Tr}\,(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

6) Démontrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.

7) Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai pour les matrices symétriques de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$?

Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le *critère de Sylvester*, valable en toute dimension.

Pour une matrice carrée quelconque $M = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier $k \in [\![1, n]\!]$, on définit le k^e *mineur principal* comme étant le déterminant de la matrice $M = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,k]\!]} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R})$. On précise qu'une matrice carrée de taille n possède n mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de la **question 4**, sont les déterminants des matrices $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Par exemple, pour la matrice B de la **question 4**, on constate que :

$$\det(B_1) = 1 > 0, \quad \det(B_2) = 2 > 0, \quad \det(B_3) = 3 > 0.$$

La matrice B vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

8) On fixe une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in [\![1, n]\!]$, ainsi qu'un vecteur colonne $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{k,1}(\mathbb{R})$. Déterminer un vecteur colonne $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que :

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X.$$

9) Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille n de la matrice.

10) Soit $n \geqslant 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$. On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec } M_{n-1} \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.
Justifier l'existence d'un vecteur colonne $V \in \mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V + U = 0$.
En notant $Q = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, démontrer alors que $Q^\top MQ$ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.

11) Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

12) Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?

13) La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ? Justifier.

14) Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

15) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle définie positive ?

Exercice 3 (Sujet Mines-Ponts complet – 3h)

Problème inverse pour les matrices de distance euclidienne

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

- On note $\langle x, y\rangle$ (resp. $X^\top Y$) le produit scalaire euclidien usuel de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ (resp. X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié canoniquement à $\mathbb{R}^n$) et $\|x\|$ la norme de x (resp. $\|X\|$ la norme de X) associée au produit scalaire.
- Etant donnés deux points P et P' de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{d}\left(P, P'\right)$ la distance entre P et P' associée à la norme euclidienne usuelle :
$$\mathrm{d}\left(P, P'\right) = \left\|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}\right\|$$
où O est le point origine.
- Un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$ est dit positif si
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, f(x)\rangle \geqslant 0$$
Une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top A X \geqslant 0.$$
- Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$ est positif si, et seulement si, sa matrice (symétrique) dans $\mathcal{B}$ est positive.
- On appelle matrice de distance euclidienne (on notera MDE pour abréger) une matrice carrée $D = (d_{i,j})$ d'ordre n telle qu'il existe un entier naturel non nul m et des points $A_1, \ldots A_n$ de $\mathbb{R}^m$ tels que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ on a :
$$d_{i,j} = \mathrm{d}\left(A_i, A_j\right)^2.$$

On se propose dans ce sujet d'apporter une réponse partielle au problème consistant à déterminer, étant donnés des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, une MDE de spectre $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
On admet sans démonstration dans ce sujet que des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ sont positifs si et seulement si leur spectre est inclus dans $[0, +\infty[$.

1 Matrices de Hadamard

On appelle **matrice de Hadamard** d'ordre n toute matrice H carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1 et telle que $\dfrac{1}{\sqrt{n}}H$ soit orthogonale.

1 ▷ Donner des exemples de matrices de Hadamard d'ordre 1 et 2.

2 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard alors toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne de H par -1 ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes de H est encore une matrice de Hadamard.

3 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n alors il existe une matrice de Hadamard d'ordre n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1 . En déduire que si $n \geqslant 2$ alors n est pair.

4 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n supérieur ou égal à 4 , alors n est multiple de 4 .

On pourra commencer par montrer que l'on peut supposer la première ligne de H uniquement composée de 1 et sa deuxième ligne composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à -1 .

2 Quelques résultats sur les endomorphismes symétriques

Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres classées par ordre croissant de f. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on introduit l'ensemble π_k des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On admettra ici que les min et max considérés existent bien (cela découle de la continuité des expressions considérés).

5 ▷ Justifier l'existence d'une base $(e_1,\ldots,e_n)$ orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f, le vecteur e_i étant associé à λ_i pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On garde par la suite cette base.

6 ▷ Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et S_k un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On pose $T_k = \operatorname{Vect}(e_k,\ldots,e_n)$ Justifier que $S_k \cap T_k \neq \{0\}$.

7 ▷ En considérant $x \in S_k \cap T_k$, justifier que :

$$\max_{x\in S_k,\|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle \geqslant \lambda_k.$$

8 ▷ Soit $k \in [\![1,n]\!]$. A l'aide de $S = \operatorname{Vect}(e_1,\ldots,e_k) \in \pi_k$, montrer l'égalité :

$$\lambda_k = \min_{S\in\pi_k}\left(\max_{x\in S,\|x\|=1} \langle x, f(x)\rangle\right)$$

C'est le théorème de Courant-Fischer. On aura également besoin par la suite du résultat de factorisation suivant :

9 ▷ Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si M est positive, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = B^\top.B$. En déduire que si M n'est plus supposée positive, mais admet une unique valeur propre strictement positive λ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire u, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \lambda u.u^\top - B^\top.B$.

3 Caractérisation des MDE

On note $\mathbf{e}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 . On note Δ_n l'ensemble des MDE d'ordre n et Ω_n l'ensemble des matrices M symétriques positives d'ordre n telles que $M.\mathbf{e} = 0$. On note enfin P la matrice d'ordre n définie par

$$P = \mathrm{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{e}.\mathbf{e}^\top$$

On note T l'application de Δ_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à D associe

$$T(D) = -\frac{1}{2}PDP$$

et K l'application de Ω_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à une matrice A associe

$$K(A) = \mathbf{e}.\mathbf{a}^\top + \mathbf{a}.\mathbf{e}^\top - 2A$$

où $\mathbf{a}$ est la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les coefficients diagonaux de A.

10 ▷ Montrer que P est symétrique et que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé est une projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(\mathbf{e})^{\perp}$.

11 ▷ Soit $D \in \Delta_n$. Soient $A_1,\ldots,A_n$ des points dont la matrice D est la matrice de distance euclidienne. On note x_i les vecteurs coordonnées des A_i. Soit M_A la matrice dont les colonnes sont les x_i et C la colonne formée des $\|x_i\|^2$.
Ecrire D comme combinaison linéaire de $C\mathbf{e}^\top, \mathbf{e}C^\top$ et $M_A^\top.M_A$. En déduire que pour toute matrice D de Δ_n on a $T(D) \in \Omega_n$.

12 ▷ Montrer que pour toute matrice A de Ω_n on a $K(A) \in \Delta_n$.
13 ▷ Montrer que les applications $T : \Delta_n \to \Omega_n$ et $K : \Omega_n \to \Delta_n$ vérifient :

$$T \circ K = \mathrm{Id}_{\Omega_n}.$$

On peut montrer (mais ce n'est pas demandé) que l'on a également $K \circ T = \mathrm{Id}_{\Delta_n}$ et que ces deux applications sont bijections réciproques l'une de l'autre.
14 ▷ Montrer qu'une matrice symétrique D d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle est MDE si et seulement si $-\frac{1}{2}PDP$ est positive.
15 ▷ Montrer que toute matrice symétrique à coefficients positifs, non nulle et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre strictement positive d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre $\mathbf{e}$ est MDE.

4 Spectre des MDE

On conserve ici les notations de la partie précédente.
16 ▷ Préciser la somme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ des valeurs propres d'une MDE d'ordre n.
17 ▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(\mathbf{e})^\perp$, on a

$$x^\top Dx \leqslant 0.$$

18 ▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, ordonnées dans l'ordre croissant. Montrer

$$\lambda_{n-1} \leqslant 0$$

et en déduire que D a exactement une valeur propre strictement positive.

5 Problème inverse pour les MDE

Soit H une matrice de Hadamard d'ordre n et de première ligne constante égale à 1.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que

$$\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

On note U la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}}H$ et Λ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i. On note enfin $D = U^\top \Lambda U$.
19 ▷ Montrer que D est symétrique, à coefficients positifs et à diagonale nulle, et a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, avec λ_1 d'espace propre de dimension 1 .
20 ▷ Montrer que D est MDE.
21 ▷ Donner une matrice de distance euclidienne d'ordre 4 telle que son spectre soit $\{5, -1, -2, -2\}$.
Remarquons pour finir que la portée de ce résultat est à nuancer, car outre les conditions sur les ordres possibles pour les matrices de Hadamard, on ne sait même pas s'il existe de telles matrices pour tout ordre multiple de 4 ! D'autre part, il existe évidemment des matrices de distance euclidienne d'ordre impair...

FIN DE L'ÉPREUVE