Corrigé du devoir surveillé du 10/01/2022

Exercice n°1 : Théorème de décomposition de Dunford

1) $\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable, } (D,N) = (A,0)}$ est la décomposition de Dunford de A.
En effet, $D = A$ est diagonalisable, $N = 0$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = A + 0 = D + N$.

2) $\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, } (D,N) = (0,A)}$ est la décomposition de Dunford de A.
En effet, $D = 0$ est diagonalisable, $N = A$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = 0 + A = D + N$.

3) Soit A une matrice trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ inversible et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, telles que $P^{-1}AP = T$.
Les matrices A et T sont semblables donc ont même polynôme caractéristique : $\chi_A = \chi_T$.
Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ les coefficients diagonaux de la matrice T.
Puisque T est triangulaire, $\chi_T(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
Donc $\chi_A = \chi_T$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
$\boxed{\text{Une matrice trigonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ vérifie l'hypothèse du théorème}}$ donc admet une décomposition de Dunford.

4) Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
D' est diagonalisable (car diagonale), N' est nilpotente (car $(N')^2 = 0$), $A = D' + N'$, cependant D' et N' ne commutent pas :

$$D'N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq N'D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Non, } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ n'est pas la décomposition de Dunford de } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \text{ car ces deux matrices ne commutent pas.}$$

De plus, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres distinctes 1 et 2,
donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $(D,N) = (A,0)$ est la décomposition de Dunford de A.

5) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.
Supposons par l'absurde que A admet une décomposition de Dunford (D,N).
D'après le théorème, on a de plus $\chi_A = \chi_D$.
Puisque D est diagonalisable, D est semblable à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Son polynôme caractéristique vaut $\chi_A(X) = \chi_D(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$.
Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{La matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ n'admet pas de décomposition de Dunford dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

6) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Calculons son polynôme caractéristique, en développant par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XI_3 - A) \\ &= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)\begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)(X^2+2X+1) \\ &= (X+1)^3. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X+1)^3.}$
χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de l'énoncé, A admet une décomposition de Dunford.

Soit (D,N) le couple de sa décomposition de Dunford.
D est diagonalisable et $\chi_D(X) = \chi_A(X) = (X+1)^3$ donc $\mathrm{Sp}(D) = \{-1\}$.
D est semblable à la matrice diagonale avec des -1 sur sa diagonale, donc D est semblable à $-I_3$.
Ainsi $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$, $P^{-1}DP = -I_3$, d'où $D = P(-I_3)P^{-1} = -I_3$. On a $\boxed{D = -I_3}$, d'où

$$N = A - D = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que (D,N) est la décomposition de Dunford de A (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

- $A = D + N$.
- $D = -I_3$ est diagonale donc diagonalisable.
- $N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 0$. Donc N est nilpotente d'indice 2.
- $D = -I_3$, donc commute avec N : $DN = ND = -N$.

Ainsi $\boxed{\left(D = -I_3, N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.}$

7) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
Posons $P(X) = X(X-1)$. $P(A^2) = A^2(A^2 - I_n) = A^2(A - I_n)(A + I_n) = 0(A + I_n) = 0$.
Donc $\boxed{\text{le polynôme } X(X-1) \text{ annule la matrice } A^2.}$

8) Le polynôme $X(X-1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ et annule A^2, donc, d'après la propriété admise dans les rappels, $\boxed{A^2 \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$
Posons $D = A^2$ et $N = A - A^2$.
Vérifions que (D,N) est la décomposition de Dunford de A :

- $A = D + N$ par construction.
- $D = A^2$ est diagonalisable.
- $N^2 = (A - A^2)^2 = A^2(I_n - A)^2 = A^2(A - I_n)(A - I_n) = 0$ car $A^2(A - I_n) = 0$.
  $N^2 = 0$ donc N est nilpotente.
- $DN = A^2(A - A^2) = A^3 - A^4(A - A^2)A^2 = ND$, donc D et N commutent.

Conclusion : $\boxed{(D = A^2, N = A - A^2) \text{ est la décomposition de Dunford de la matrice } A.}$

9) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Calculons son polynôme caractéristique.
On effectue $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(XI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ -1 & X-1 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\Big((X-3)(X-1)+1\Big) \\
&= (X-1)(X^2 - 4X + 4) \\
&= (X-1)(X-2)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2.}$ Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1,2\}$.
On a $\dim(\ker(A - I_3)) = 1$. Calculons $\dim(\ker(A - 2I_3))$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(A-2I_3)$ est de rang 2.
Par le théorème du rang, $\dim(\ker(A-2I_3)) = 1 < 2$.
La dimension du sous-espace propre associé à 2 est strictement inférieure à la multiplicité de 2 en tant que valeur propre dans χ_A, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$

10) Calculons les noyaux des endomorphismes demandés.

$$\begin{array}{rclrcl}
A - I_3 & = & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. & \ker(A-I_3) & = & \operatorname{vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
A - 2I_3 & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. & \ker(A-2I_3) & = & \operatorname{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\
(A-2I_3)^2 & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. & \ker(A-2I_3)^2 & = & \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
\end{array}$$

Posons alors

$$\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

P est la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique.
Or $\det(P) = -1 \neq 0$ donc la famille(e_1, e_2, e_3) est libre et de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
$P \in GL_3(\mathbb{R})$ est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (e_1, e_2, e_3).
De plus $\boxed{\ker(u-\mathrm{id}) = \operatorname{vect}(e_1),\ \ker(u-2\mathrm{id}) = \operatorname{vect}(e_2),\ \ker(u-2\mathrm{id})^2 = \operatorname{vect}(e_2, e_3).}$
Par construction, on a $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = 2e_2$. De plus

$$u(e_3) = Ae_3 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_2 + 2e_3.$$

Écrivons la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{B = \operatorname{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

11) Montrons que :

$$\boxed{\left(D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

En effet :

- $B = D_1 + N_1$.
- D_1 est diagonale donc diagonalisable.
- $N_1^2 = 0$ donc N_1 est nilpotente.
- D_1 et N_1 commutent car $D_1N_1 = N_1D_1 = 2N_1$.

12) • Puisque A et B représentent la matrice du même endomorphisme u dans la base canonique et dans la base $\mathscr{B}$, on a la formule de changement de base $P^{-1}AP = B$ i.e. $A = PBP^{-1}$. De plus on obtient l'inverse de P en remarquant que :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + e_3, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = e_1 - e_3, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = e_3. \quad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}}.$$

.

• On pose $\boxed{D = PD_1P^{-1} \text{ et } N = PN_1P^{-1}.}$ Montrons que (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

- ⋆ $A = PBP^{-1} = P(D_1 + N_1)P^{-1} = PD_1P^{-1} + PN_1P^{-1} = D + N$.
- ⋆ $D = PD_1P^{-1}$ est semblable à la matrice diagonale D_1 donc D est diagonalisable.
- ⋆ $N^2 = (PN_1P^{-1})^2 = PN_1^2P^{-1} = 0$ donc N est nilpotente.
- ⋆ D et N commutent car D_1 et N_1 commutent :

$$DN = (PD_1P^{-1})(PN_1P^{-1}) = P(D_1N_1)P^{-1} = P(N_1D_1)P^{-1} = (PN_1P^{-1})(PD_1P^{-1}) = ND.$$

Donc (D, N) est la décomposition de Dunford de A. Calculons ces matrices :

$$D = PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Puis :

$$N = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Finalement $\boxed{\left(D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$

Exercice n°2 : Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

1)
- $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$.
- $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[1,+\infty[$.
  $P(t)Q(t)e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.
  Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
  $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc, en particulier, $\boxed{\text{l'intégrale définissant } (P|Q) \text{ est convergente}}$.

2)
- L'application $(.|.)$ est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$,
$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = (Q|P),$$
  donc $(.|.)$ est symétrique.
- Pour tout $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}(\lambda P+Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t)+Q(t))R(t)e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t}\mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité de l'intégrale convergente)} \\ &= \lambda(P|R)+(Q|R),\end{aligned}$$
  donc $(.|.)$ est linéaire à gauche.
- $(.|.)$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
- Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} \geq 0$.
  D'où, par positivité de l'intégrale (qui converge), on a :
$$(P|P) = \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\mathrm{d}t \geq 0.$$
  $(.|.)$ est donc positif.
- Enfin, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si $(P|P)=0$, alors $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\mathrm{d}t = 0$.
  Or $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, les bornes de l'intégrale sont "dans le bon ordre" et $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ converge, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t}=0$, et donc $P^2(t)=0$, puis $P(t)=0$.
  Le polynôme P a donc une infinité de racines (tous les éléments de $\mathbb{R}_+$), donc $P=0$.
  $(.|.)$ est donc bien défini.
- $\boxed{(.|.) \text{ définit donc bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$

3) Soit $k \in [\![1,n]\!]$.
Posons $u(t)=t^k$, $u'(t)=kt^{k-1}$, $v'(t)=e^{-t}$, $v(t)=-e^{-t}$.
u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
$u(t)v(t) = -t^ke^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
Enfin, les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes.
On peut donc intégrer par parties et on a :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^ke^{-t}\mathrm{d}t &= [-t^ke^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} kt^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= 0 + k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^ke^{-t}\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t.}$

4) Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(X^k|1) = k!$ (HR_k)
Initialisation : Pour $k=0$, $(X^0|1) = (1|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$ (cours), donc on a bien HR_0.
Hérédité : Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ et supposons HR_k vérifiée.
Alors, d'après la question précédente, comme $k+1 \in [\![1,n]\!]$, on a
$$(X^{k+1}|1) = \int_0^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}\mathrm{d}t = (k+1)\int_0^{+\infty} t^ke^{-t}\mathrm{d}t = (k+1)(X^k|1) \underset{HR_k}{=} (k+1)k! = (k+1)!.$$
On a bien HR_{k+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ (X^k|1) = k!}$.

5)
- Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha(P) = XP'' + (1-X)P'$ est un polynôme.
  De plus, comme $\deg(P') \leq \deg(P) - 1 \leq n-1$ et $\deg(P'') \leq n-2$, on a
  $$\deg(\alpha(P)) \leq \max(\deg(XP''), \deg((1-X)P')) \leq \max(1+n-2, 1+n-1) \leq n,$$
  donc $\alpha(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On a donc $\alpha : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.
- De plus, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
  $$\begin{aligned}\alpha(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'' + (1-X)(\lambda P + Q)' \\ &= X(\lambda P'' + Q'') + (1-X)(\lambda P' + Q') \quad \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda XP'' + XQ'' + \lambda(1-X)P' + (1-X)Q' = \lambda(XP'' + (1-X)P') + (XQ'' + (1-X)Q') \\ &= \lambda\alpha(P) + \alpha(Q),\end{aligned}$$
  donc α est une application linéaire.
- $\boxed{\alpha \text{ est donc bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

6) On a $\alpha(1) = X(1)'' + (1-X)(1)' = 0$, $\alpha(X) = X(X)'' + (1-X)(X)' = 1 - X$ et, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,
$$\alpha(X^k) = X(X^k)'' + (1-X)(X^k)' = Xk(k-1)X^{k-2} + (1-X)kX^{k-1} = -kX^k + k^2X^{k-1}.$$
Rq : On remarque que cette formule est encore valable pour $k = 1$, donc on a,
$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \alpha(X^k) = -kX^k + k^2X^{k-1} \quad et \quad \alpha(1) = 0.}$$
On a donc
$$\mathrm{Mat}_{(1,X,\ldots,X^n)}(\alpha) = \mathrm{Mat}_{(1,\ldots,X^n)}(\alpha(1), \ldots, \alpha(X^n)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

7) Comme $\mathrm{Mat}_{(1,X,\ldots,X^n)}(\alpha)$ est triangulaire supérieure, son spectre se lit sur la diagonale. On a donc $\boxed{\mathrm{Sp}(\alpha) = \mathrm{Sp}\left(\mathrm{Mat}_{(1,X,\ldots,X^n)}(\alpha)\right) = \{-k \mid k \in [\![0, n]\!]\}.}$

8) Comme α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant $n+1$ valeurs propres, toutes ces valeurs propres sont simples. $-k$ est donc valeur propre simple de α, donc $\boxed{\dim E_{-k}(\alpha) = \dim(\ker(\alpha + k\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1.}$

9)
- Soit (Q_k) une base de $\ker(\alpha + k\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ avec $Q_k \neq 0$.
  Notons a le coefficient dominant de Q_k (non nul car $Q_k \neq 0$).
  Alors $P_k = \dfrac{1}{a}Q_k$ est un polynôme ayant un coefficient dominant égal à 1.
  De plus, $P_k = \dfrac{1}{a}Q_k \in \mathrm{vect}(Q_k) = \ker(\alpha + k\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, donc
  $$(\alpha + k\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})(P_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha(P_k) + kP_k = 0 \Leftrightarrow \alpha(P_k) = -kP_k.$$
  Il existe donc bien un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
- Supposons qu'il existe un autre polynôme $R_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
  Alors $R_k \in \ker(\alpha + k\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{vect}(Q_k) = \mathrm{vect}\left(\dfrac{1}{a}Q_k\right) = \mathrm{vect}(P_k)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = \lambda P_k$.
  De plus, les deux polynômes P_k et R_k ont le même coefficient dominant (1), donc $\lambda = 1$, et, par suite, $R_k = P_k$.
  On a donc bien l'unicité.
- $\boxed{\text{Il existe donc bien un unique polynôme } P_k \in \mathbb{R}_n[X], \text{ de coefficient dominant égal à 1, vérifiant } \alpha(P_k) = -kP_k.}$

10) Soit d le degré de P_k, avec $d \in [\![0, n]\!]$ car P_k est non nul et $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$.

Il existe donc $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tels que $P_k = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ (et $a_d = 1$).

Alors on a :
$$\begin{aligned}\alpha(P_k) &= \sum_{i=0}^{d} a_i \alpha(X^i) \quad \text{(par linéarité de } \alpha) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{d} a_i \left(-iX^i + i^2X^{i-1}\right) \quad \text{(d'après la question } \mathbf{6}) \text{)} \\ &= \sum_{i=1}^{d} -ia_iX^i + \sum_{i=0}^{d} a_i i^2 X^{i-1}.\end{aligned}$$

Comme on a par ailleurs $\alpha(P_k) = -kP_k$ (car $P_k \in \ker(\alpha + k\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})$), on obtient, en identifiant les coefficients dominants :

$$-da_d = -ka_d \underset{a_d=1}{\Leftrightarrow} -d = -k \Leftrightarrow d = k,$$

donc $\boxed{P_k \text{ est de degré } k.}$

11)
- On a $\alpha(1) = 0 = -0(1)$ et le coefficient dominant de 1 est 1, donc, par unicité de P_0, on a $\boxed{P_0 = 1.}$
- On a $\alpha(X) = -X+1$, donc $\alpha(X-1) = \alpha(X) - \alpha(1) = -X+1+0 = -(X-1)$, et le coefficient dominant de $X-1$ est 1, donc, par unicité de P_1, on a $\boxed{P_1 = X-1.}$
- Le coefficient dominant de X^2-4X+2 est 1 et

$$\alpha(X^2-4X+2) = \alpha(X^2) - 4\alpha(X) + 2\alpha(1) = -2X^2+4X-4(-X+1)+0 = -2X^2+8X-4 = -2(X^2-4X+2),$$

donc, par unicité de P_2, on a $\boxed{P_2 = X^2-4X+2.}$

12) Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

- Par linéarité de l'intégrale convergente,

$$(\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (tP''(t)+P'(t))Q(t)e^{-t} - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t,$$

où toutes ces intégrales convergent d'après la question **1)**.
- Posons $u'(t) = tP''(t) + P'(t)$, $u(t) = tP'(t)$, $v(t) = Q(t)e^{-t}$, $v'(t) = Q'(t)e^{-t} - Q(t)e^{-t}$.
u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
$u(t)v(t) = tP'(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
Enfin, toutes les intégrales convergent (toujours d'après la question **1)**).
On peut donc intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (tP''(t)+P'(t))Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t &= \left[tP'(t)Q(t)e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tP'(t)(Q'(t)e^{-t} - Q(t)e^{-t})\mathrm{d}t \\ &= 0 - 0 - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(\alpha(P)|Q) &= \int_0^{+\infty} (tP''(t)+P'(t))Q(t)e^{-t} - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t.}$

13) Par symétrie des rôles de P et Q, on a aussi

$$(\alpha(Q)|P) = -\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t,$$

donc, par symétrie du produit scalaire,

$$(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t = (\alpha(Q)|P) = (P|\alpha(Q)).$$

Conclusion : $\boxed{(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q)).}$

14)
- Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}&(\alpha(P_i)|P_j) = (-iP_i|P_j) = -i(P_i|P_j) \\ \text{et } &(\alpha(P_i)|P_j) = (P_i|\alpha(P_j)) = (P_i|-jP_j) = -j(P_i|P_j),\end{aligned}$$

donc, d'après la question **13)**, $-i(P_i|P_j) = -j(P_i|P_j)$, donc $(i-j)(P_i|P_j) = 0$, donc, si $i \neq j$, on a $(P_i|P_j) = 0$.
La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est donc orthogonale.

- De plus, elle est composée de vecteurs non nuls (car le coefficient dominant de ces polynômes vaut 1), donc cette famille est libre.
  Comme elle est libre et composée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- $\boxed{\text{La famille } (P_0,\dots,P_n) \text{ est donc bien une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X].}$

15) Remarquons déjà que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = (1|X^k) = k!$ d'après la question **4)**.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si un n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ vérifie $(*)$, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, en posant $P(X) = X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on doit avoir

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k, \quad \text{ie} \quad k! = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k.$$

Le n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie donc bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, si n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix},$$

alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la ligne k de ce système donne $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k = k! = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$.

D'où, pour tout polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^n \lambda_i a_k x_i^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k t^k e^{-t}\mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On a donc bien $(*)$.
Conclusion : cqfd.

16) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est une matrice de Van der Monde, donc inversible car les x_i sont deux à deux distincts.

Le système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$ est donc de Cramer, donc il admet un unique n-uplet solution. D'où l'unicité de $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ vérifiant $(*)$.

17)
- Soit $P = P_n^2$. Alors $\deg(P) = 2\deg(P_n) = 2n$, donc $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.
- De plus, $t \mapsto P(t)e^{-t} = P_n^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ (car P_n, non nul, n'a pas une infinité de racines), donc, par stricte positivité de l'intégrale , $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t > 0$.

- Enfin, comme x_i est racine de P_n pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, x_i est aussi racine de $P = P_n^2$, donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$, donc on a bien $\boxed{\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t \neq 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).}$