Épreuve de Mathématiques 5

Correction

Exercice 1 (extrait de Epita 2025)

1) Polynôme caractéristique :

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x & -1 & -2 \\ -1 & x & -1 \\ -2 & 1 & x \end{vmatrix} \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$$

$$= \begin{vmatrix} x & -1 & -2 \\ -1 & x & -1 \\ x-2 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} x & -1 & -2 \\ -1 & x & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_1 \longleftarrow C_1 - C_3$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} x+2 & -1 & -2 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)(x+2)x \qquad \text{Matrice triangulaire}$$

Conclusion :

$$\boxed{\chi_A(x) = x(x-2)(x+2)}$$

Les valeurs propres sont :

- $\lambda = 0$ de multiplicité $\alpha = 1$;
- $\lambda = 2$ de multiplicité $\alpha = 1$;
- $\lambda = -2$ de multiplicité $\alpha = 1$;

Vérification avec la trace : $\mathrm{Tr}\,(A) = 0 = 2 - 2 + 0$.

Diagonalisation : La matrice 3×3 A admet 3 valeurs propres distinctes : d'après la condition suffisante de diagonalisation, elle est donc diagonalisable :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable, semblable à } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Sous-espaces propres et P :

- $E_0 = \text{Ker } A$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \iff AX = 0$$

$$\iff \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}}$$

- $E_2 = \text{Ker}\,(2I_3 - A)$:

$$X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\-1 & 2 & -1\\-2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$
$$\iff \begin{cases} 2x - y - 2z = 0 & L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_2\\ -x + 2y - z = 0 & \\ -2x + y + 2z = 0 & L_3 = -L_1\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0\\ 3y - 4z = 0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 5z/3\\ y = 4z/3\end{cases}$$
$$\iff X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5z/3\\4z/3\\z\end{pmatrix}$$
$$\iff X \in \text{Vect}\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}}$$

- $E_{-2} = \text{Ker}\,(-2I_3 - A)$:

$$X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\-1 & -2 & -1\\-2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$
$$\iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 & L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2\\ x + 2y + z = 0 & \\ 2x - y + 2z = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0\\ -3y = 0\\ -5z = 0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = -z\\ y = 0\end{cases}$$
$$\iff X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix}$$
$$\iff X \in \text{Vect}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}$$

Ainsi, $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de vecteurs propres pour A. En conclusion,

$$\boxed{\text{Avec } P = \begin{pmatrix}-1 & 5 & -1\\-2 & 4 & 0\\1 & 3 & 1\end{pmatrix},\ A = PDP^{-1}}$$

2) Soit $M' \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$M'^2 = D \Longrightarrow PM'^2P^{-1} = PDP^{-1} \qquad (PM'P^{-1})^2 = A \Longrightarrow PM'^2P^{-1} = PDP^{-1}$$
$$\Longrightarrow (PM'P^{-1})^2 = A \qquad \Longrightarrow M'^2 = D$$

Donc, avec $M = PM'P^{-1}$,

$$M^2 = A \iff M'^2 = D$$

Donc $M'^2 = D$ et $M^2 = A$ ont exactement le même nombre de solutions.

Résolution de $M'^2 = D$: Soit $M' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ telle que $M'^2 = D$.

$$M'D = M'^3 = DM'$$

Ce qui s'écrit, après calcul des produits,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2b_1 & -2c_1 \\ 0 & 2b_2 & -2c_2 \\ 0 & 2b_3 & -2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ -2a_3 & -2b_3 & -2c_3 \end{pmatrix}$$

D'où $b_1 = c_1 = a_2 = c_2 = a_3 = b_3 = 0$, et $M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $M'^2 = D$ s'écrit $\begin{cases} a_1^2 = 0 \\ b_2^2 = 2 \\ c_2^2 = -2 \end{cases}$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la dernière équation n'a pas de solution, donc $M'^2 = D$ non plus, et $M^2 = A$ non plus.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la première équation a une solution, et les deux autres 2 solutions distinctes. Ainsi, $M'^2 = D$ (et donc $M^2 = A$) ont exactement $1 \times 2 \times 2 = 4$ solutions.

Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R} : 0 \text{ solutions. } \mathbb{K} = \mathbb{C} : 4 \text{ solutions.}}$$

3) Soit X une colonne propre de A pour la valeur propre λ : $AX = \lambda X$.

$$\begin{aligned} AMX &= MAX && \text{Car } AM = MA \\ &= M(\lambda X) && \text{Car } AX = \lambda X \\ &= \lambda MX \end{aligned}$$

Donc $MX \in E_\lambda$. Or A admet n valeurs propres distinctes, ce qui entraîne $\dim E_\lambda = 1$.
Ainsi, $E_\lambda = \mathrm{Vect}\,(X)$, et $MX \in E_\lambda$ signifie qu'il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $MX = \mu X$. Finalement,

$$\boxed{\text{Toute colonne propre } X \text{ de } A \text{ est aussi colonne propre de } M}$$

4) Comme A de taille n possède n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable. Soit $\mathscr{B}' = (X_1, \dots, X_n)$ une base de colonnes propres, et $P = (X_1 \mid \cdots \mid X_n)$ la matrice de passage associée. D'après la question 3, $\mathscr{B}'$ est aussi une base de colonnes propres pour M : $M = PD_M P^{-1}$ avec D_M diagonale. Ainsi,

$$\boxed{\text{Il existe } P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ inversible telle que } P^{-1}AP \text{ et } P^{-1}MP \text{ soient toutes les deux diagonales}}$$

5) Soit P la matrice de passage diagonalisant A. Notons $M' \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et $M = PM'P^{-1}$. De même qu'à la question 2, $M^2 = A \iff M'^2 = D$, et, en notant μ_i les coefficients diagonaux de M' et λ_i ceux de D, il vient

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \mu_i^2 = \lambda_i$$

L'équation $X^2 = \lambda_i$ a toujours au moins une solution, car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Il y a 2 solutions distinctes si et seulement si $\lambda_i \neq 0$, et une seule solution (de multiplicité 2) si $\lambda_i = 0$.

$$\boxed{\text{Si } \alpha_0 \text{ est la multiplicité de 0 comme valeurs propre, } M^2 = A \text{ a } 2^{n-m} \text{ solutions}}$$

Exercice 2 (CCINP PC 2025)

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note

$$\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

définie par $\varphi_A : M \mapsto AM$. En particulier, on remarque qu'en notant 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors φ_{0_n} est l'application nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ_{I_n} est l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de l'application φ_A.

Partie I - Généralités

1) Montrer pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'application φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Montrer pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ que $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déduire de la question précédente que φ_A est un isomorphisme si et seulement si la matrice A est inversible.
Indication : si φ_A est un isomorphisme, on pourra considérer un antécédent par φ_A de la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie II - Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$. On considère un nombre $a \in \mathbb{C}$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

4) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre $a \in \mathbb{C}$ pour que la matrice A soit diagonalisable.

5) Déterminer la matrice de φ_A dans la base $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

6) En déduire les valeurs propres de φ_A, puis déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de φ_A en fonction de $a \in \mathbb{C}$.

7) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que φ_A soit diagonalisable.

Partie III - Réduction de φ_A si A est diagonalisable

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nous allons étudier les propriétés liant les éléments propres de la matrice A et ceux de l'endomorphisme φ_A.

8) Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$.

9) En déduire pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.

10) Rappeler la caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur. En déduire que la matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

11) On note χ_A le polynôme caractéristique de A. Montrer que $\chi_A(\varphi_A)$ est l'endomorphisme nul. En déduire une inclusion entre l'ensemble des valeurs propres de A et l'ensemble des valeurs propres de φ_A, puis que la matrice A et l'endomorphisme φ_A ont les mêmes valeurs propres.

12) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dans le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ de φ_A pour la valeur propre λ si et seulement si chaque colonne de la matrice M est dans le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de la matrice A pour la valeur propre λ.

On déduit directement de la question précédente que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de la matrice A, l'application qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe le n-uplet de ses colonnes :

$$\Psi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} \right)$$

est un isomorphisme du sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ sur $(E_\lambda(A))^n$.

13) Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, déduire des résultats de cette partie une expression du déterminant et de la trace de φ_A en fonction du déterminant et de la trace de A.

Exercice 3 (D'après banque PT)

On identifie dans tout ce problème $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des matrices colonnes à n lignes.
On note E^* l'espace $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E. Par exemple $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$ sera l'ensemble des applications linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Dans tout le problème, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications suivantes :

$$\tau_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}\,(AM) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \gamma_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

Partie 1 (Questions préliminaires) **1)** Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, les applications τ_A et γ_A sont linéaires.

2) Donner la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et celle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$.

Partie 2 (Une caractérisation des matrices nilpotentes)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

1) Montrer que si λ est une valeur propre (éventuellement complexe) de A, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, λ^k est une valeur propre de A^k.

2) On suppose A nilpotente.

- **a)** Montrer que la seule valeur propre de A est 0.
- **b)** Montrer que $\mathrm{Tr}\ A = 0$.

3) On suppose toujours A nilpotente.

- **a)** Soit M une matrice telle que $AM = MA$. Montrer que la matrice AM est encore nilpotente.
- **b)** En déduire que $\mathrm{Ker}\ \gamma_A \subset \mathrm{Ker}\ \tau_A$.
  On admettra[1] qu'il existe alors $w : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $\tau_A = w \circ \gamma_A$.
- **c)** **i)** Si $E_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice ayant un 1 en i-ème ligne, j-ème colonne, et 0 ailleurs, et $U = (u_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, calculer le produit UE_{ij} puis $\mathrm{Tr}\,(UE_{ij})$.
  - **ii)** Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^* \\ U & \mapsto & \tau_U \end{array}$ est linéaire et injective.
    En déduire que f est un isomorphisme.
  - **iii)** En déduire qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\tau_A = \tau_B \circ \gamma_A$.
- **d)** Montrer que $A = BA - AB$.

4) On suppose maintenant qu'il existe une matrice B telle que $A = BA - AB$.

- **a)** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $BA^k - A^kB = kA^k$.
- **b)** À quelle condition la matrice A^k est-elle un vecteur propre de γ_B ?
- **c)** En déduire que A est nilpotente.

5) Quelle caractérisation des matrices nilpotentes a-t-on obtenue ?

FIN DE L'ÉPREUVE

1. Ce théorème de factorisation, présent dans le sujet d'origine, est l'exercice 21 de la feuille d'algèbre linéaire.