Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Dans cet exercice $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n est un entier naturel non nul, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1) Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la digonaliser : donner D diagonale, P inversible, et une relation liant A, D et P.

2) Déterminer le nombre de matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ vérifiant $M^2 = A$ selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dans la suite, A et M sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent : $AM = MA$.
On suppose aussi que A admet n valeurs propres distinctes.

3) Démontrer que toute colonne propre X de A est aussi colonne propre de M.

4) En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}MP$ sont toutes les deux diagonales.

5) Désormais $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Déterminer le nombre de matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $M^2 = A$

Exercice 2 (Étude d'un endomorphisme matriciel)

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note

$$\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

définie par $\varphi_A : M \mapsto AM$. En particulier, on remarque qu'en notant 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors φ_{0_n} est l'application nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ_{I_n} est l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de l'application φ_A.

Partie I - Généralités

1) Montrer pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'application φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Montrer pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ que $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déduire de la question précédente que φ_A est un isomorphisme si et seulement si la matrice A est inversible.
Indication : si φ_A est un isomorphisme, on pourra considérer un antécédent par φ_A de la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie II - Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$. On considère un nombre $a \in \mathbb{C}$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

4) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre $a \in \mathbb{C}$ pour que la matrice A soit diagonalisable.

5) Déterminer la matrice de φ_A dans la base $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

6) En déduire les valeurs propres de φ_A, puis déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de φ_A en fonction de $a \in \mathbb{C}$.

7) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que φ_A soit diagonalisable.

Partie III - Réduction de φ_A si A est diagonalisable

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nous allons étudier les propriétés liant les éléments propres de la matrice A et ceux de l'endomorphisme φ_A.

8) Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$.

9) En déduire pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.

10) Rappeler la caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur. En déduire que la matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

11) On note χ_A le polynôme caractéristique de A. Montrer que $\chi_A(\varphi_A)$ est l'endomorphisme nul. En déduire une inclusion entre l'ensemble des valeurs propres de A et l'ensemble des valeurs propres de φ_A, puis que la matrice A et l'endomorphisme φ_A ont les mêmes valeurs propres.

12) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dans le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ de φ_A pour la valeur propre λ si et seulement si chaque colonne de la matrice M est dans le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de la matrice A pour la valeur propre λ.

On déduit directement de la question précédente que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de la matrice A, l'application qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe le n-uplet de ses colonnes :

$$\Psi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} \right)$$

est un isomorphisme du sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ sur $(E_\lambda(A))^n$.

13) Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, déduire des résultats de cette partie une expression du déterminant et de la trace de φ_A en fonction du déterminant et de la trace de A.

Exercice 3 (D'après banque PT)

On identifie dans tout ce problème $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des matrices colonnes à n lignes.
On note E^* l'espace $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E. Par exemple $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$ sera l'ensemble des applications linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Dans tout le problème, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications suivantes :

$$\tau_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \operatorname{Tr}(AM) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \gamma_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

Partie 1 (Questions préliminaires)

1) Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, les applications τ_A et γ_A sont linéaires.

2) Donner la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et celle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$.

Partie 2 (Une caractérisation des matrices nilpotentes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

1) Montrer que si λ est une valeur propre (éventuellement complexe) de A, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, λ^k est une valeur propre de A^k.

2) On suppose A nilpotente.

- **a)** Montrer que la seule valeur propre de A est 0.
- **b)** Montrer que $\operatorname{Tr} A = 0$.

3) On suppose toujours A nilpotente.

- **a)** Soit M une matrice telle que $AM = MA$. Montrer que la matrice AM est encore nilpotente.
- **b)** En déduire que $\operatorname{Ker} \gamma_A \subset \operatorname{Ker} \tau_A$.
  On admettra[1] qu'il existe alors $w : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $\tau_A = w \circ \gamma_A$.
- **c)**
  - **i)** Si $E_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice ayant un 1 en i-ème ligne, j-ème colonne, et 0 ailleurs, et $U = (u_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, calculer le produit UE_{ij} puis $\operatorname{Tr}(UE_{ij})$.
  - **ii)** Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^* \\ U & \mapsto & \tau_U \end{array}$ est linéaire et injective.
    En déduire que f est un isomorphisme.
  - **iii)** En déduire qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\tau_A = \tau_B \circ \gamma_A$.
- **d)** Montrer que $A = BA - AB$.

4) On suppose maintenant qu'il existe une matrice B telle que $A = BA - AB$.

- **a)** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $BA^k - A^kB = kA^k$.
- **b)** À quelle condition la matrice A^k est-elle un vecteur propre de γ_B ?
- **c)** En déduire que A est nilpotente.

5) Quelle caractérisation des matrices nilpotentes a-t-on obtenue ?

FIN DE L'ÉPREUVE

1. Ce théorème de factorisation, présent dans le sujet d'origine, est l'exercice 21 de la feuille d'algèbre linéaire.