

Épreuve de Mathématiques 5

Correction

Exercice 1

1) a) Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(xI_3 - A) \\ &= \begin{vmatrix} x-3 & 3 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -1 & 3 & x-1 \end{vmatrix} \leftarrow \\ &= (-1)^{2+2}(x-2) \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\ &= (x-2) \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x-2 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)^3 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\chi_A(x) = (x-2)^3$$

Par conséquent,

L'unique valeur propre de A est $\lambda = 2$ de multiplicité $\alpha = 3$

Diagonalisation : Supposons A diagonalisable : il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D = 2I_3$ telles que

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ &= 2P(2I_3)P^{-1} \\ &= 2PP^{-1} \\ &= 2I_3 \end{aligned}$$

Or $A \neq 2I_3$, par exemple car $a_{11} = 3 \neq 2$. Donc, par l'absurde,

A n'est pas diagonalisable

b) Calculs :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad B^3 = B \times 0 = 0$$

c) Pour $k \geq 2$, $B^k = B^{k-2}B^2 = 0$. D'où

$$\forall k \geq 2, \quad B^k = 0$$

2) Soit $n \geq 2$. Comme B et I_3 commutent, la formule du binôme s'applique :

$$\begin{aligned}
 A^n &= (2I_3 + B)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} B^k \\
 &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k \quad \text{Car } B^k = 0 \text{ pour } k \geq 2 \\
 &= 2^n I_3 + n 2^{n-1} B
 \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, la formule est juste, et on vérifie la formule pour $n = 0$: $I_3 = I_3$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 2^n I_3 + n 2^{n-1} B}$$

3) a) On remarque que

$$X_{n+1} = AX_n$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad X_n = A^n X_0$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: est vraie par hypothèse.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= AX_n \\
 &= A^{n+1} X_0
 \end{aligned} \quad (\mathcal{H}_n)$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 0 \quad X_n = A^n X_0}$

b) Ainsi, d'après la question 2,

$$\begin{aligned}
 X_n &= (2^n I_3 + n 2^{n-1} B) X_0 \\
 &= \begin{pmatrix} 2^n + n 2^{n-1} & -3n 2^{n-1} & -n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ n 2^{n-1} & -3n 2^{n-1} & 2^n - n 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} + n 2^n - 3n 2^{n-1} \\ 2^n \\ n 2^n - 3n 2^{n-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (4 - n) 2^{n-1}, \quad v_n = 2^n \quad \text{et} \quad w_n = -n 2^{n-1}}$$

Limites :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty}$$

Exercice 2 (d'après CCP PC)

Partie I - Étude d'un exemple

1) Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_f(x) &= \det(x \text{id} - f) \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -1 \\ x-4 & x-2 & -1 \\ x-4 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)^2(x-4) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{f \text{ admet deux valeurs propres distinctes, } \lambda = 1 \text{ et } \mu = 4}$$

2) $E_4 = \text{Ker}(A - 4I_3)$: Nous savons que $1 \leq \dim E_4 \leq \alpha = 1$. Donc $\dim E_4 = 1$.

De plus, avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $AX = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4X$. Donc $X \neq 0$ est un vecteur directeur de la droite E_4 :

$$\boxed{E_4 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

$$\underline{E_1 = \text{Ker}(A - I_3)}$$

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff (A - I_3)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff x + y + z = 0 \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}$$

3) Comme $\dim E_1 + \dim E_4 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, f est diagonalisable et

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = PDP^{-1}}$$

Il y a plusieurs D possibles – dès qu'il y a plus d'une valeur propre – et, même à D fixée, il y a plusieurs bases et donc P possibles.

4) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}(m) : \quad J^m = 3^{m-1}J$$

est vraie pour tout $m \geq 1$.

- $\mathcal{H}_1$ est vraie par hypothèse.
- $\mathcal{H}_m \implies \mathcal{H}_{m+1}$: Supposons $\mathcal{H}(m)$ vraie. $J^2 = 3J$, donc $J^{m+1} = 3^{m-1}JJ = 3^m J$, donc $\mathcal{H}(m+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall m \geq 1 \quad J^m = 3^{m-1}J}$

5) En termes d'applications linéaires, la question précédente s'écrit $j^m = 3^{m-1}j$ pour tout $m \geq 1$. Ainsi, puisque $f = \text{id} + j$ et que j et id commutent, la formule du binôme nous donne, pour $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 f^m &= (\text{id} + j)^m \\
 &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} j^k \text{id}^{m-k} \\
 &= \text{id} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} 3^{k-1} j \\
 &= \text{id} + \frac{1}{3} \left(-1 + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 3^k \right) j \quad \text{Factoriser par } \frac{1}{3} \text{ et rajouter le terme en } k=0 : \text{ le binôme réapparaît.} \\
 &= \text{id} + \frac{1}{3} (4^m - 1) j
 \end{aligned}$$

Cette relation est encore vérifiée en 0, ainsi

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \quad f^m = \text{id} + \frac{1}{3} (4^m - 1) j}$$

On peut aussi prouver cette relation par récurrence.

- 6) a) D'après la question 5, pour tout $m \geq 1$, $f^m = \left(\text{id} - \frac{1}{3}j \right) + 4^m \left(\frac{1}{3}j \right)$, donc les p et q suivant conviennent :

$$\boxed{p = \text{id} - \frac{1}{3}j \text{ et } q = \frac{1}{3}j}$$

- b) Ceci est une preuve typique d'unicité. On ne peut pas conclure immédiatement à partir de $(p_1 - p_2) + 4^m(q_1 - q_2) = 0$ sans arguments.

Soit (p_1, q_1) et (p_2, q_2) deux couples d'endomorphismes vérifiant $\forall m \in \mathbb{N} \quad f^m = p_i + 4^m q_i$.

Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N} \quad (p_1 - p_2) + 4^m(q_1 - q_2) = 0$, et en particulier pour $m = 0$ et $m = 1$:

$$\begin{cases} (p_1 - p_2) + (q_1 - q_2) = 0 \\ (p_1 - p_2) + 4(q_1 - q_2) = 0 \end{cases}$$

Et en résolvant ce système, on trouve $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$. Donc

$\boxed{\text{Ce couple est unique}}$

- c) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha p + \beta q = 0$. D'après d)i., il vient

$$0 = \alpha p + \beta q = \alpha \left(\text{id} - \frac{1}{3}j \right) + \beta \left(\frac{1}{3}j \right) = \alpha \text{id} + (\beta - \alpha) \frac{1}{3}j$$

Or, vu leurs matrices, id et j ne sont pas colinéaires, donc $\alpha = 0$ et $\beta = \alpha = 0$. Conclusion :

$\boxed{(p, q) \text{ forme une famille libre}}$

- d) $p^2 = \text{id} - \frac{2}{3}j + \frac{1}{9}(3j) = \text{id} - \frac{1}{3}j = p$ et $q^2 = \frac{1}{9}(3j) = q$. Donc

$\boxed{p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs}}$

$$p \circ q = (\text{id} - \frac{1}{3}j) \circ (\frac{1}{3}j) = \frac{1}{j} - \frac{1}{9}(3j) = 0$$

Et p et q commutent comme polynômes en j :

$$q \circ p = q \circ p = 0$$

Partie II - Généralisation : cas de deux valeurs propres

$$\begin{aligned} 1) \quad (f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id}) &= f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda\mu \text{id} \\ &= \lambda^2 p + \mu^2 q - (\lambda + \mu)(\lambda p + \mu q) + \lambda\mu(p + q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $P(X) = (X - \lambda)(X - \mu)$ annule f :

$$(f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id}) = 0$$

Or P est un polynôme scindé à racines simples : $\lambda \neq \mu$. Donc, par théorème de diagonalisation,

$$f \text{ est diagonalisable.}$$

2) Comme $P(f) = 0$, les valeurs propres sont des racines de P :

$$\text{Sp}(f) \subset \{\lambda, \mu\}$$

Si μ n'est pas une valeur propre de f , comme f est diagonalisable, on a $f = \lambda \text{id}$.

De plus $f = \lambda(\text{id} - q) + \mu q = \lambda \text{id} + (\mu - \lambda)q$. Donc $(\mu - \lambda)q = 0$. Or $\mu - \lambda \neq 0$, donc $q = 0$.

Ce qui est exclu : « q non nul ». C'est donc absurde.

Donc μ est une valeur propre de f .

De même, par un raisonnement par l'absurde, comme $p \neq 0$, λ est valeur propre de f . Conclusion :

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda, \mu\}$$

$$3) \quad f - \lambda \text{id} = \lambda p + \mu q - \lambda p - \lambda q = (\mu - \lambda)q. \quad \text{De même} \quad f - \mu \text{id} = (\lambda - \mu)p.$$

$$4) \quad 0 = (f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id}) = (\mu - \lambda)q \circ (\lambda - \mu)p = -(\mu - \lambda)^2 q \circ p. \quad \text{Or } \lambda \neq \mu, \text{ donc}$$

$$q \circ p = 0$$

De même, par symétrie des rôles joués par p et q ,

$$p \circ q = 0$$

Par définition, $p = \text{id} - q$, donc

$$0 = p \circ q = (\text{id} - q) \circ q = q - q^2$$

Ainsi, $q^2 = q$. De même, $p^2 = p$ puis, en conclusion,

$$p \text{ et } q = \text{id} - p \text{ sont des projecteurs, } pq = qp = 0$$

Montrons que $\text{Ker } q = \text{Im } p$:

$$\begin{aligned} \boxed{\subset} \quad x \in \text{Ker } q &\implies q(x) = 0 \\ &\implies x - p(x) = 0 \quad (\text{car } q = \text{id} - p) \\ &\implies x = p(x) \\ &\implies x \in \text{Im } p \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } q \subset \text{Im } p$.

$$\begin{aligned}
\boxed{\supset} \quad x \in \text{Im } p &\implies \exists y \in E \ x = p(y) \\
&\implies \exists y \in E \ q(x) = q \circ p(y) = 0 \quad (\text{car } q \circ p = 0) \\
&\implies q(x) = 0 \\
&\implies x \in \text{Ker } q
\end{aligned}$$

Donc $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$.

En conclusion $\boxed{\text{Ker } q = \text{Im } p}$

5) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}(m) : f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

est vraie pour tout $m \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$ est vraie par hypothèse : $\text{id} = p + q$.
- $\mathcal{H}_m \implies \mathcal{H}_{m+1}$: Supposons $\mathcal{H}(m)$ vraie.

$$f^{m+1} = (\lambda^m p + \mu^m q)(\lambda p + \mu q) = \lambda^{m+1} p + \mu^{m+1} q$$

Donc $\mathcal{H}(m+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall m \geq 0 \quad f^m = \lambda^m p + \mu^m q}$

Partie III - Cas général

1) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. Par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$, donc en sommant sur k

$$P(f) = \sum_{k=0}^d a_k f^k = \sum_{k=0}^d a_k \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^d a_k \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i$$

(Lorsqu'on a une double somme (finie !) et qu'on ne sait pas quoi faire, dans le doute, intervertir.)

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i}$$

2) Soit

$$P = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$$

Le polynôme P est scindé, à racines simples car les λ_i sont 2 à 2 distincts.

De plus, $P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i = \sum_{i=1}^m 0 \times p_i = 0$ Ainsi, f admet un polynôme annulateur à racines simples :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

3) Soit $\ell \in \{1, \dots, m\}$. L_ℓ est un polynôme d'interpolation de Lagrange : $L_\ell(\lambda_i) = 1$ si $i = \ell$ et 0 sinon. La propriété montrée au 1 s'écrit donc

$$\boxed{L_\ell(f) = \sum_{i=1}^m L_\ell(\lambda_i) p_i = p_\ell}$$

D'après 2),

$$(f - \lambda_\ell \text{id}) \circ L_\ell(f) = (f - \lambda_\ell \text{id}) \circ \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq \ell}} \frac{1}{\lambda_\ell - \lambda_j} (f - \lambda_j \text{id})$$

$$= \alpha \left[(f - \lambda_\ell \text{id}) \circ \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq \ell}} (f - \lambda_j \text{id}) \right]$$

$$= \alpha P(f) = 0$$

$$\text{Avec } \alpha = \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq \ell}} \frac{1}{\lambda_\ell - \lambda_j} \in \mathbb{R}$$

Où P est le polynôme annulateur de la question 2

Ainsi, d'après ci-dessus, $(f - \lambda_\ell \text{id}) \circ p_\ell = 0$. En particulier, pour tout $x \in E$, $(f - \lambda_\ell \text{id})(p_\ell(x)) = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{Im}(p_\ell) \subset \text{Ker}(f - \lambda_\ell \text{id})}$$

Détermination du spectre de f :

Le polynôme de la question 2) annule f , donc les valeurs propres sont parmi ses racines.

Réciproquement, pour tout $\ell \in \{1, \dots, \ell\}$, $p_\ell \neq 0$ par hypothèse, donc $\text{Im } p_\ell \neq \{0\}$, et

$$E_{\lambda_\ell} = \text{Ker}(f - \lambda_\ell \text{id}) \neq \{0\}$$

puisqu'on vient de montrer qu'il contient $\text{Im } p_\ell$. Donc λ_ℓ est valeur propre. Ainsi,

$$\boxed{\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}}.$$

4) Si $i \neq j$,

$$p_i p_j = L_i(f) L_j(f) = P(f) Q(f) = 0$$

Avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.

Si $i = j$, de même qu'en partie 2, on utilise le résultat ci-dessus et $\text{id} = \sum_{k=1}^m p_k$:

$$p_i = \sum_{k=1}^m p_i p_k = p_i^2$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j. \end{cases}}$$

5) Comme $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ et f diagonalisable,

$$E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id}) = E}$$

Soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Dans une base adaptée à cette somme directe, notons D la matrice de f .

La matrice $P_i = L_i(D)$ de $p_i = L_i(f)$ est diagonale (polynôme en une matrice diagonale) et a des 0 sur la diagonale pour les colonnes correspondant à des vecteurs $e_k \notin E_{\lambda_i}$, et 1 si $e_k \in E_{\lambda_i}$.

Donc p_i est le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

6) Dans ce cas, $E = \bigoplus_{j=1}^m E_j$, où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j .

Soit $(q_1, \dots, q_m)$ les projecteurs associés à cette somme directe : q_i est le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

La matrice A de u dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette somme directe est diagonale : la base sera une base de vecteurs propres. Si on note Q_i les matrices de q_i dans $\mathcal{B}$, elles seront aussi diagonales, avec des 1 ou des 0 sur la diagonale (selon que les $e_k \in E_i$ ou non).

Ainsi, $A = \sum_{j=1}^m \lambda_j Q_j$, et plus généralement,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k Q_j$$

Ce qui s'écrit, en terme d'endomorphismes,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k q_j$$

Autre méthode : u agit comme une homothétie sur chaque E_i donc la formule est vraie pour $k = 1$ (ou via les matrices). Puis on utilise $p_i p_j = 0$ si $i \neq j$, et $p_i^2 = p_i$, pour montrer la formule ci-dessus par récurrence à partir de la formule en $k = 1$. Vous choisissez ce qui vous semble le plus clair.

Exercice 3 (Centrale PC 2024 – Partie IV)

A – Une méthode de Newton matricielle.

1) En dimension finie,

$$\begin{aligned} M - \mu I_q \text{ inversible} &\iff \text{Ker}(M - \mu I_q) = \{0\} && \text{Car injectif équivaut à bijectif} \\ &\iff \mu \notin \text{Sp}(M) && \text{Car } E_\mu = \text{Ker}(M - \mu I_q) \end{aligned}$$

Or les valeurs propres de M sont les racines *simple* de P , donc ne sont pas racines de P' :

$$\text{Pour toute racine complexe } \mu \text{ de } P', \text{ la matrice } M - \mu I_q \text{ est inversible}$$

Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, P' est scindé. Soit $\mu_1, \dots, \mu_{s-1}$ les racines (avec multiplicité) de P' . Alors

$$P'(M) = \prod_{i=1}^{s-1} (M - \mu_i I_q)$$

Et

$$P'(M) \text{ est inversible comme produit de matrices inversibles}$$

2) Soit α_i la multiplicité de λ_i dans χ_M . Comme $\deg \chi_M = q \geq \alpha_i$ pour tout i , on peut écrire

$$P^q = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \underbrace{\prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{q - \alpha_i}}_{= Q \in \mathbb{C}[X]}$$

Ainsi, $P^q = \chi_M Q$ et

$$\chi_M \text{ divise } P^q$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = 0$. D'où $P(M)^q = \chi_M(M)Q(M) = 0$:

$$P(M) \text{ est nilpotente}$$

3) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $2^n \geq q$.

Soit un tel n_0 , et soit $n \geq n_0$ quelconque. D'après le calcul de la question 2,

$$(P(M))^{2^n} = 0$$

Or il existe $B_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n : P(M_n) = 0$. Ainsi,

$$M_{n+1} = M_n - 0 \times P'(M_n)^{-1} = M_n$$

Donc (M_n) est constante à partir de $n = n_0$:

La suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire

- 4) On peut montrer directement que M et M_n commutent par récurrence. Montrons un résultat plus fort : M_n est un polynôme en M .

Montrons que, si $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ est inversible, alors A^{-1} est un polynôme en A .

Soit $A \in GL_q(\mathbb{C})$. Comme 0 n'est pas valeur propre, $\chi_A(0) \neq 0$.

De plus, par Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$.

Soit $a = \chi_A(0) \neq 0$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\chi_A = a(1 - XQ)$. Alors

$$\begin{aligned} \chi_A(A) = 0 &\implies I_q - AQ(A) = I_q - Q(A)A = 0 \\ &\implies AQ(A) = Q(A)A = I_q \end{aligned}$$

Donc $A^{-1} = Q(A)$. Conclusion :

Si $A \in GL_q(\mathbb{C})$, A^{-1} est un polynôme en A .

Montrons que $\mathbb{C}[A]$ est stable par somme, produit, fonction polynomiale et passage à l'inverse.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $\mathbb{C}[A] = \{Q(A) \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}$. Cet ensemble est stable par somme et produit.

Le point numéro 2 est encore vrai : Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q^k \in \mathbb{C}[X]$ par la formule du binôme de Newton.
- Puis, par combinaison linéaire, si $R = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, $R \circ Q = \sum_{k=0}^d a_k Q^k \in \mathbb{C}[X]$.

Ainsi, pour $Q, R \in \mathbb{C}[X]$, si $B = Q(A)$ et $C = R(B)$, alors $C = R \circ Q(A)$ est un polynôme en A : $\mathbb{C}[A]$ est stable par fonction polynomiale.

Nous venons de prouver que cet ensemble est stable par passage à l'inverse, car, si $B \in \mathbb{C}[A] \cap GL_q(\mathbb{C})$, B^{-1} est un polynôme en B donc en A .

On peut éventuellement se passer de tout ça, si on considère que les points admis ne concernent pas uniquement la matrice M fixée, mais une matrice quelconque – ce qu'elle est. Dans ce cas, il suffit de prouver que A^{-1} est un polynôme en A – voir de l'admettre, et le prouver si on a le temps en fin d'épreuve.

Montrons que $M_{n+1} \in \mathbb{C}[M_n]$: Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ci-dessus, $P'(M_n)^{-1} \in \mathbb{C}[M_n]$, donc

$$P(M_n)P'(M_n)^{-1} \in \mathbb{C}[M_n]$$

et ainsi, $M_{n+1} \in \mathbb{C}[M_n]$.

Montrons par récurrence que :

$$\mathcal{H}_n : \quad M_n \in \mathbb{C}[M]$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: est vraie par hypothèse : $M_0 = M$.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie : $M_n \in \mathbb{C}[M]$
D'après ci-dessus, $M_{n+1} \in \mathbb{C}[M_n]$, donc $M_{n+1} \in \mathbb{C}[M]$ par composition. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion** : $\forall n \geq 0 \quad M_n \in \mathbb{C}[M]$

Comme M_n est un polynôme en M , d'après le cours et l'énoncé,

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les matrices M et M_n commutent

- 5) Si (M_n) est stationnaire à partir de n_0 ,

$$M_{n_0+1} = M_{n_0} - P(M_{n_0})P'(M_{n_0})^{-1} = M_{n_0}$$

Ainsi, en multipliant par $P'(M_{n_0})$, il vient

$$P(M_{n_0}) = 0$$

Or P est, par construction, scindé à racines simples :

$$A = M_{n_0} \text{ est diagonalisable}$$

6) A commute avec M (question 4), donc $M - A$ commute avec M :

$$A \text{ et } N \text{ commutent}$$

Faisons apparaître $P(M)$ dans N pour montrer qu'elle est nilpotente.

$$\begin{aligned}
 N &= M - A \\
 &= M_0 - M_{n_0} \\
 &= \sum_{n=0}^{n_0-1} M_n - M_{n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{n_0-1} P(M_n)P'(M_n)^{-1} && \text{Or } P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n \\
 &= \sum_{n=0}^{n_0-1} P(M)(P(M))^{2^n-1} B_n P'(M_n)^{-1} \\
 &= P(M)C && \text{où } C = \sum_{n=0}^{n_0-1} (P(M))^{2^n-1} B_n P'(M_n)^{-1}
 \end{aligned}$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P(M))^{2^n-1}$, B_n et $P'(M_n)^{-1}$ sont des polynômes en M , $C \in \mathbb{C}[M]$.
Donc $P(M)$ et C commutent comme polynômes en M . Ainsi,

$$N^q = (P(M))^q C^q = 0$$

Donc

$$N \text{ est nilpotente}$$

Remarque culturelle : cette décomposition s'appelle la décomposition de Dunford (ou de Jordan-Chevalley-Dunford) de M , sous forme diagonalisable + nilpotente qui commutent. Cette décomposition est unique, et A et N sont des polynômes en A .

B – Un calcul de racine carrée pour certaines matrices réelles trigonalisables.

7) Un développement limité est exact dans les polynômes, poussé à un ordre suffisant (à développer). Le développement limité usuel de $(1+x)^\alpha$ en 0 nous donne, avec $\alpha = 1/2$:

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^q \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^q)$$

$$\text{Posons } R_q = \sum_{k=0}^q \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} X^k \in \mathbb{R}[X]. \text{ Alors}$$

$$1+x = R_q(x)^2 + 2R_q(x) \times o(x^q) + o(x^{2q}) = R_q(x)^2 + o(x^q)$$

Notons $Q = 1 + X - R_q^2 = \sum_{k=v}^d a_k X^k$, avec $a_v \neq 0$ (sinon, $Q = 0$ et le résultat est immédiat). En 0,

$$Q(x) \sim a_v x^v \quad \text{et} \quad Q(x) = o(x^q)$$

D'où $v > q$, et $Q = X^q \sum_{k=v-q}^{d-q} a_{k+v} x^k$. En conclusion,

Il existe un polynôme $R_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.

8) Soit un polynôme R_q comme à la question précédente, et Q tels que

$$1 + X - R_q(X)^2 = QX^q$$

Si N est nilpotente, X^n avec $n \in \mathbb{N}$ est un polynôme annulateur. Donc 0 est sa seule valeur propre (dans $\mathbb{C}$), et son polynôme caractéristique, scindé ($\mathbb{C}$ algébriquement clos) est $\chi_N = X^q$.

Donc une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ est d'ordre au plus $q : N^q = 0$.

L'équation polynomiale précédente se simplifie en

$$I_q + N - R_q(N)^2 = Q(N) \times 0 = 0$$

D'où

$R_q(N)$ est une racine carrée de $I_q + N$

9) Nous avons montré (questions 4 et 6) que A et N sont des polynômes en M . D'où

A et N sont à coefficients réels

Le spectre de M est inclus dans $\mathbb{R}$ par hypothèse, donc le polynôme $P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (X - \lambda)$ est à coefficients réels. En se plaçant sur $\mathbb{C}$, on peut appliquer les résultats du A (question 5) : $P(A) = 0$. Par théorème de diagonalisation (sur $\mathbb{R}$ car $P \in \mathbb{R}[X]$)

A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$

10) Le spectre de A est inclus dans les racines de P , c'est-à-dire, par construction de P , dans $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$:

$$\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$$

11) Notons $\mu_1, \dots, \mu_q$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. D'après la question 10, il existe $P \in GL_q(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

Comme, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mu_i \geq 0$, posons

$$D' = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n}) \quad \text{et} \quad A' = PD'P^{-1}$$

Alors $A'^2 = A$:

$A' = P \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n}) P^{-1}$ est une racine carrée de A

Comme $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, A est inversible. Soit $\tilde{N} = A^{-1}N$ (on commence par chercher au brouillon en écrivant les lignes ci-dessous :)

$$\begin{aligned} M &= A + N \\ &= A(I_q + A^{-1}N) \\ &= A(I_q + \tilde{N}) \end{aligned}$$

De plus, $A, A^{-1}, N \in \mathbb{R}[M]$, et donc $\tilde{N} \in \mathbb{R}[M]$ aussi. Toutes commutent entre elles, et

$$\tilde{N}^q = (A^{-1})^q N^q = 0$$

D'après la question 8, $R_q(\tilde{N})$ est une racine carrée de $\tilde{N}$ nilpotente.

D'après ci-dessus, A' est une racine carrée de A . Or c'est un polynôme en A : soit $Q = \sum_{i=1}^s \sqrt{\lambda_i} L_i$ avec

(L_i) les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ deux à deux distincts.

Alors $Q(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$ pour tout i , et donc $D' = Q(D)$. Puis, par changement de base, $A' = Q(A) \in \mathbb{C}[A]$.

Donc $A' \in \mathbb{C}[M]$ et commute avec $R_q(\tilde{N})$:

$$(A'R_q(\tilde{N}))^2 = A'^2(R_q(\tilde{N}))^2 = A(I_q + A^{-1}N) = M$$

Ainsi,

$A'R_q(A^{-1}N) \text{ est une racine carrée de } M$

FIN DE L'ÉPREUVE