Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 16 décembre 2024

Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On considère les matrices carrées A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = A - 2I_3$$

1) **a)** Déterminer les valeurs propres de A. Est-elle diagonalisable ?

b) Calculer B et B^2.

c) En déduire B^k pour tout entier $k \geqslant 2$.

2) Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 1$, A^n. La formule obtenue est-elle encore vrai pour $n = 0$?

3) On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n - 3v_n - w_n, \qquad v_{n+1} = 2v_n, \qquad w_{n+1} = u_n - 3v_n + w_n$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

b) Déduire des questions précédentes l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n, v_n et w_n en fonctions de n, puis les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Notations :

Dans tout ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

$\mathscr{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs. On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Étant donné $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathscr{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \mathrm{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$), alors $\prod_{1 \leqslant i \leqslant q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \cdots \circ f_q$.

Partie I - Étude d'un exemple

Soit f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

2) Déterminer sous-espaces propres de f.

3) Montrer que f est diagonalisable. Donner la matrice D de f dans une base de vecteurs propres, ainsi que la matrice de passage P vers cette base, et la formule liant A, P et D.

4) Calculer par récurrence J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

5) En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

6) **a)** À l'aide de la question 5, trouver des endomorphismes p et q tels que

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad f^m = \lambda^m p + \mu^m q \tag{1}$$

b) Montrer que ce couple (p, q) est unique : $\exists!(p, q) \in \mathscr{L}(E)^2$ vérifiant (1).

c) Montrer que (p, q) forme une famille libre.

d) Calculer p^2 et q^2. Quelle est la nature des endomorphismes p et q ? Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.

Partie II - Généralisation : cas de deux valeurs propres

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que

$$\lambda \neq \mu \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{id} & = & p + q \\ f & = & \lambda p + \mu q \\ f^2 & = & \lambda^2 p + \mu^2 q \end{array}$$

1) En exprimant f^2, f et id à l'aide de p et q, calculer $(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (f - \mu\,\mathrm{id})$, puis en déduire que f est diagonalisable.

2) En déduire le spectre de f.

3) Exprimer $f - \lambda\,\mathrm{id}$ et $f - \mu\,\mathrm{id}$ à l'aide de p et q.

4) Calculer $p \circ q$, $q \circ p$, p^2 et q^2. Donner la nature de p et q. Montrer que $\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im}\, p$.

5) Montrer par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

Partie III - Cas général

Soit $p_1, \ldots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, m nombres réels deux à deux distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$$

1) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $P(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$

2) En déduire que f est diagonalisable.

3) On considère les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_m$ associés aux reels $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$.
Montrer que pour tout $\ell \in [\![1, m]\!]$, $p_\ell = L_\ell(f)$. En déduire que $\operatorname{Im}(p_\ell) \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda_\ell \operatorname{id})$, puis que le spectre de f est :

$$\operatorname{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}.$$

4) Vérifier que pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i, j \leq m$, on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

5) Justifier le fait que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{id})$ est directe et égale à E et que les projecteurs associés à cette décomposition de E sont les p_i.

6) On suppose que $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.
Montrer qu'il existe des projecteurs de E, $(q_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ non nuls, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k q_j.$$

Exercice 3 (D'après Centrale : Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford)

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de M. Pour $a_1, \ldots, a_q \in \mathbb{K}$, on note $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_q)$ la matrice A de $\mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ telle que, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$:

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} a_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Dans tout cet exercice, étant donnée une matrice $M \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$, on appelle racine carrée de M toute matrice $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = M$.
On dit qu'une matrice $N \in \mathscr{M}_q(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$.

On fixe $M \in \mathscr{M}_q(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M (avec $s \in \mathbb{N}^*$). On définit alors

$$P(X) = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)$$

On note P' le polynôme dérivé de P.

Pour tout polynôme $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \gamma_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $Q(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \gamma_k M^k \in \mathscr{M}_q(\mathbb{C})$ et on pose

$$\mathbb{C}[M] = \{Q(M) \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}$$

On admet alors et on pourra utiliser librement que :

- si $A, B \in \mathbb{C}[M]$, alors A et B commutent, et $A + B$ et AB appartiennent à $\mathbb{C}[M]$;
- si $Q \in \mathbb{C}[X]$ et si $A \in \mathbb{C}[M]$, alors $Q(A) \in \mathbb{C}[M]$.

A – Une méthode de Newton matricielle.

1) Montrer que, pour toute racine complexe μ de P', la matrice $M - \mu I_q$ est inversible. En déduire que $P'(M)$ est inversible.

2) Montrer que le polynôme caractéristique χ_M de M divise P^q. En déduire que $P(M)$ est nilpotente.

Grâce à ces résultats, on peut définir la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\begin{cases} M_0 = M \\ \forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1} \end{cases}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- M_n est bien définie et appartient à $\mathscr{M}_q(\mathbb{C})$;
- il existe $B_n \in \mathbb{C}[M]$ telle que $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$;
- la matrice $P'(M_n)$ est inversible.

3) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les matrices M et M_n commutent.

5) Soit n_0 l'indice où la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ devient stationnaire. On note $A = M_{n_0}$. Montrer que A est diagonalisable.

6) On pose $N = M - A$. Justifier que A et N commutent et que N est nilpotente.

B – Un calcul de racine carrée pour certaines matrices réelles trigonalisables.

7) En utilisant le développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, montrer qu'il existe un polynôme $R_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.

8) En déduire l'expression d'une racine carrée de $I_q + N$ lorsque N est une matrice nilpotente.

Pour les questions suivantes, on suppose que M est à coefficients réels et trigonalisable dans $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ et que le spectre de M est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
On considère alors les matrices A et N introduites dans la sous-partie A.

9) Justifier que A et N sont à coefficients réels et que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$.

10) Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

11) Construire une racine carrée A' de A. En déduire l'expression d'une racine carrée de M.

FIN DE L'ÉPREUVE