

Épreuve de Mathématiques 5

Correction

Exercice 1 (EDHEC, ECE 2016)

1) $A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - 4A = 4I_3$

Par conséquent $\boxed{\text{Le polynôme } P = X^2 - 4X - 4 \text{ vérifie } P(A) = 0}$

2) D'après 1), $A^2 - 4A = -4I_3$ donc, en divisant par 4,

$$(-\frac{1}{4}A + I_3)A = A(-\frac{1}{4}A + I_3) = I_3$$

Conclusion : $\boxed{A \text{ est inversible d'inverse } -\frac{1}{4}A + I_3}$

3) Division euclidienne : il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^n = PQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg R < \deg P \tag{1}$$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ qui conviennent. Comme $\deg R \leqslant 1$,

$$R = aX + b$$

Comme $P = (X-2)^2$, $\lambda = 2$ est racine double de P. Ainsi

$$P(2) = 0 \qquad \text{et} \qquad P'(2) = 0$$

Si on dérive l'égalité (1), il vient $nX^{n-1} = P'Q + PQ' + R'$, puis en évaluant (1) et cette nouvelle équation en $X = 2$,

$$\begin{cases} 2^n = P(2)Q(2) + R(2) = R(2) = 2a + b \\ n2^{n-1} = P'(2)Q(2) + P(2)Q'(2) + R'(2) = R'(2) = a \end{cases}$$

En résolvant ce système, il vient $a = n2^{n-1}$ et $b = (1-n)2^n$, donc

$$\boxed{R = n2^{n-1}X + (1-n)2^n}$$

Cette méthode est très générale : lorsque vous avez P tel que $P(A) = 0$, vous cherchez ses racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. En effectuant la division euclidienne $X^n = PQ + R$ puis en évaluant en $X = \lambda_i$ (quitte à dériver en cas de racines multiples) on trouve le bon nombre d'équations pour déterminer les coefficients de R.

4) En évaluant (1) en $X = A$, il vient, comme $P(A) = 0$,

$$\boxed{A^n = P(A)Q(A) + R(A) = 0 + R(A) = n2^{n-1}A + (1-n)2^n I_3}$$

On vérifie que cette formule est vraie en $n = 0$. *Vérification : toujours penser à tester (au brouillon) pour $n = 0$ et $n = 1$.*

Là aussi, la méthode est généralisable. Attention, les seules racines de P sont des réels ou des complexes.

5) D'après 2), $A^{-1} = -2^{-2}A + I_3 = (-1)2^{-1-1}A + (1-(-1))2^{-1}I_3$. Donc la formule précédente reste valable pour $n = -1$.
On montre par récurrence sur n que $A^{-n} = (-n)2^{-n-1}A + (1+n)2^{-n}I_3$ (à faire).
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad A^n = n2^{n-1}A + (1-n)2^n I_3}$

Exercice 2 (E3A PC 2023)

1) Posons $P = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. P est un polynôme annulateur de u, scindé à racines simple. D'après le théorème de diagonalisation,

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable}}$$

2) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, alors $P(u) = 0$ entraîne $P(\lambda) = 0$.
Ainsi, les valeurs propres possibles de l'endomorphisme u sont

$$\boxed{\alpha = 1 \qquad \text{et} \qquad \beta = 2}$$

3) **a)** $v - w = u - \alpha\,\mathrm{id}_E - (u - \beta\,\mathrm{id}_E) = -\mathrm{id}_E + 2\,\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$.
Montrons que $E = \mathrm{Im}\,(v) + \mathrm{Im}\,(w)$ par double inclusion :
$\boxed{\subset}$ Montrons que $E \subset \mathrm{Im}\,(v) + \mathrm{Im}\,(w)$.
Soit $x \in E$. D'après le calcul ci-dessus,

$$x = \mathrm{id}_E(x) = v(x) - w(x) \in \mathrm{Im}\ v + \mathrm{Im}\ w$$

Ainsi, $E \subset \mathrm{Im}\ v + \mathrm{Im}\ w$
$\boxed{\supset}$ Montrons que $\mathrm{Im}\,(v) + \mathrm{Im}\,(w) \subset E$.
$\mathrm{Im}\ v$ et $\mathrm{Im}\ w$ sont inclus dans E, donc $\mathrm{Im}\,(v) + \mathrm{Im}\,(w) \subset E$.
Ainsi,

$$\boxed{E = \mathrm{Im}\,(v) + \mathrm{Im}\,(w)}$$

b)

$$\begin{aligned} v \circ w &= (u - \mathrm{id}_E)(u - 2\,\mathrm{id}_E) \\ &= u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E \\ &= 0 && \text{Par hypothèse} \end{aligned}$$

Comme v et w sont des polynômes en u, ils commutent. Ainsi,

$$\boxed{v \circ w = w \circ v = 0}$$

c) Prouver que $\mathrm{Im}\,(w) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$ et que $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Ker}\,(w)$.

d) *On peut le faire de deux façon : soit avec le théorème de diagonalisation, mais pour faire les choses proprement, il faut distinguer les différents spectres possibles :* $\{1, 2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$.
Puis on utilise le fait que u diagonalisable entraîne

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} E_\lambda$$

Et que $E_\alpha = \mathrm{Ker}\ v$, $E_\beta = \mathrm{Ker}\ w$.
Ou bien, on utilise les questions qui précèdent :
D'après la question c, $\mathrm{Im}\,(w) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$ et $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Ker}\,(w)$. Donc, d'après a, il vient

$$E = \mathrm{Im}\,(v) + \mathrm{Im}\,(w) \subset \mathrm{Ker}\,(w) + \mathrm{Ker}\,(v)$$

Comme $\mathrm{Ker}\,(w) + \mathrm{Ker}\,(v) \subset E$ (sous-espaces vectoriels de E), par double inclusion on obtient

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}\,(v) \oplus \mathrm{Ker}\,(w)}$$

4) *Là aussi, on pourrait utiliser les théorèmes de diagonalisation, en faisant toujours attention au fait que vous ne connaissez pas encore le spectre.*
En suivant le sujet, on utilise la somme directe précédente.
Soit $\mathscr{B}_1$ une base de $E_1 = \text{Ker } v$ et $\mathscr{B}_2$ une base de $E_2 = \text{Ker } w$.
Comme $E = \text{Ker}\,(v) \oplus \text{Ker}\,(w)$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de E.
Si e_i est un vecteur de $\mathscr{B}_1$, $v(e_i) = u(e_i) - e_i = 0$. Donc $u(e_i) = e_i$.
De même, si e_i est un vecteur de $\mathscr{B}_2$, $u(e_i) = 2e_i$. Ainsi,

$$\text{Mat}\,(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{\dim E_1} & (0) \\ (0) & \overbrace{\begin{matrix} 2 & & \\ & \ddots & \\ & & 2 \end{matrix}}^{\dim E_2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Une base } \mathscr{B} \text{ compatible avec la somme directe } E = E_2 \oplus E_2 \text{ diagonalise } u}$$

5) **a)** $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, donc $U^2 - 3U = -2I_3$. Ainsi,

$$\boxed{u \text{ satisfait à la relation (1)}}$$

b) Comme $V = U - I_3$ et $W = U - 2I_3$,

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) • <u>Base $\mathscr{B}_1$ de $\text{Ker}\,(v)$</u>

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}\,(v) \iff VX = 0$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\underline{\text{Ker}\,(v) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

- <u>Base $\mathscr{B}_2$ de Ker (w)</u>

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(w) \iff WX = 0$$

$$\iff \begin{cases} -x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$$

$$\iff \left\{ x = y \right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Conclusion :

$$\underline{\operatorname{Ker}(w) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathscr{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

d) Posons

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Par construction de $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$, $U = PDP^{-1}$.

Exercice 3 (PT 2023 A)

1) Étude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.

a) Déterminons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \det(xI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} x+1 & 2 & -4 \\ 0 & x+1 & -2 \\ 2 & 2 & x-5 \end{vmatrix} && L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} x+1 & 2 & -4 \\ 0 & x+1 & -2 \\ -x+1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\
& && C_1 \longleftarrow C_1 + C_3 \\
&= (x-1) \begin{vmatrix} x+1 & 2 & -4 \\ 0 & x+1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1) \begin{vmatrix} x-3 & 2 & -4 \\ -2 & x+1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && \longleftarrow \; C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 \\
&= (x-1)(-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)(-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ x-1 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)^2 \Big[(x+1) - 2 \Big] \\
&= (x-1)^3
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\chi_A(x) = (x-1)^3}$$

Ainsi, $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de A, de multiplicité 3.

b) Si A était diagonalisable, elle serait semblable à I_3 : il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$, telle que

$$A = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$$

Or $a_{11} = -1 \neq 1$, donc $A \neq I_3$:

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

c) Déterminons $E_1 = \operatorname{Ker}(I_3 - A)$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff (I_3 - A)X = 0$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 0 & L_1 \longleftarrow 1/2L_1 \\ \quad 2y - 2z = 0 & L_2 \longleftarrow 1/2L_2 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_1 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

d) Résolution :

$$(A - I_3)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x - 2y + 4z = 2 \\ \quad -2y + 2z = 2 \\ -2x - 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = -1 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \quad y - z = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = -1 + z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -1 + z \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les solutions de l'équation sont les vecteurs de :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Les solutions de $u(x) = y$ sont de la forme $X_0 + \operatorname{Ker}(u)$ (cf. cours sur les systèmes linéaires), donc on retrouve E_1.

e) D'après la question c, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. De même, d'après d, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

Cf l'exercice de TD sur la trigonalisation : n'importe quel vecteur e_3, tel que (e_1, e_2, e_3) soit une base, donnera une matrice de f triangulaire, donc avec les valeurs propres sur la diagonale. Par contre, pour avoir $f(e_3) = \boxed{-2}\, e_2 + e_3$, il faut résoudre le système $(A - I_3)X = -2e_2$. Ou avoir de la chance : si on en trouve un, on en a trouvé un !

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Donc $e_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ convient : $f(e_3)=-2e_2+e_3$. Ainsi,

$$\boxed{(e_1,e_2,e_3)=(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix})}$$

f) Posons

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}}$$

Par construction, $A=PBP^{-1}$.

2) Étude de $\mathcal{N}$.

a) Méthode 1 :

- $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Avec $a=b=c=0$, $0\in\mathcal{N}$ donc $\mathcal{N}\neq\emptyset$.
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $(a',b',c')\in\mathbb{R}^3$ et

$$N=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad M=\begin{pmatrix}0&a'&b'\\0&0&c'\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Alors $\lambda N+M=\begin{pmatrix}0&\lambda a+a'&\lambda b+b'\\0&0&\lambda c+c'\\0&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{N}$ avec $A=\lambda a+a'$, $B=\lambda b+b'$ et $C=\lambda c+c'$.

Donc $\lambda N+M\in\mathcal{N}$.

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{N}\text{ est un sous-espace vectoriel de }\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Soient $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $E_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $E_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Par construction de $\mathcal{N}$, $N=aE_{12}+bE_{13}+cE_{23}$, donc

$$\mathcal{N}=\mathrm{Vect}\,(E_{12},E_{13},E_{23})$$

Donc $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel, et la démonstration précédente est inutile. Mais il faut connaître les 2 méthodes.

La famille $\mathscr{B}_{\mathcal{N}}=(E_{12},E_{13},E_{23})$ une partie de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc une famille libre. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{B}_{\mathcal{N}}\text{ est une base de }\mathcal{N}\text{, et }\dim\mathcal{N}=\mathrm{Card}\ \mathscr{B}_{\mathcal{N}}=3}$$

b) *Méthode 1 : soient N, M dans $\mathcal{N}$, on montre que $MN \in \mathcal{N}$ avec $A = 0$, $B = bc'$ et $C = 0$ (bien expliciter A, B et C et donc que MN a la forme d'une matrice de $\mathcal{N}$). Méthode 2 :*
Comme, pour tout $(i, j, k, \ell) \in [\![1, 3]\!]^4$,

$$\text{Si } j \neq k, \quad E_{ij}E_{k\ell} = 0 \in \mathcal{N} \qquad \text{et} \qquad E_{12}E_{23} = E_{13} \in \mathcal{N}$$

Donc, par distributivité, si $N = aE_{12} + bE_{13} + cE_{23}$ et $N' = a'E_{12} + b'E_{13} + c'E_{23}$ sont dans $\mathcal{N}$, alors $NN' \in \mathcal{N}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{N} \text{ est stable par produit}}$$

c) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis

$$\boxed{N^3 = 0}$$

3) Étude de $\mathcal{U}$.

a) Comme $0 \notin \mathcal{U}$,

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{U} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

b) Soit $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, et $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ telles que

$$U_1 = I + N_1 \qquad \text{et} \qquad U_2 = I + N_2$$

Alors, en développant

$$U_1U_2 = I + N_1 + N_2 + N_1N_2$$

Or $\mathcal{N}$ est stable par combinaison linéaire (2a) et par produit (2b), donc $N = N_1+N_2+N_1N_2 \in \mathcal{N}$, et $U_1U_2 = I + N \in \mathcal{U}$.

$$\boxed{\mathcal{U} \text{ est stable par produit}}$$

c) Soit $U \in \mathcal{U}$. La matrice U est triangulaire, donc son déterminant est le produit de ses termes diagonaux :

$$\det U = 1 \neq 0$$

Ainsi, $U \in GL_3(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})}$$

4) **a)** Comme $B = I + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad B^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & -2\alpha(\alpha-1) \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $N \in \mathcal{N}$ telle que $U = I + N$. Comme $\mathcal{N}$ est stable par produit, $N^2 \in \mathcal{N}$, puis $\mathcal{N}$ est stable par combinaison linéaire, donc $N' = \alpha N + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2 \in \mathcal{N}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}}$$

c) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \qquad \text{et} \qquad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$

d) En déduire que $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^{(n)} = \underbrace{U \times \ldots \times U}_{n \text{ fois}}$

e) Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geqslant 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$?

f) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.

5) **a)** En utilisant les résultats de la question 4 , expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique ?

b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice D).

FIN DE L'ÉPREUVE