Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On désigne par id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$, et I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $A^2 - 4A$. En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.

2) La matrice A est-elle inversible ?

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixée. Effectuer la division euclidienne de X^n par P. Exprimer le fait que $x = 2$ est racine double de P. En déduire une expression du reste de la division euclidienne.

4) En déduire une expression de A^n en fonction de A, I et $n \in \mathbb{N}$.

5) Vérifier que la formule trouvée ci-dessus reste valable pour $n = -1$. En déduire la formule pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme de E, tel que :

$$u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_E = 0 \tag{1}$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathscr{L}(E)}$.

1) L'endomorphisme u est il diagonalisable ?

2) Déterminer les valeurs propres possibles α et β de l'endomorphisme u. On choisira α inférieure à β.

3) On pose alors $v = u - \alpha\,\mathrm{id}_E$ et $w = u - \beta\,\mathrm{id}_E$.

a) Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \operatorname{Im}(v) + \operatorname{Im}(w)$.

b) Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.

c) Prouver que $\operatorname{Im}(w) \subset \operatorname{Ker}(v)$ et que $\operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Ker}(w)$.

d) Démontrer que $E = \operatorname{Ker}(v) \oplus \operatorname{Ker}(w)$.

4) Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

5) Application.

Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que u satisfait à la relation (1). *On fera apparaître les calculs sur la copie.*

b) Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question 3.

c) Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de $\operatorname{Ker}(v)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\operatorname{Ker}(w)$.

d) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.

Exercice 3 (Matrices unipotentes)

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites unipotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Étude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? On demande une réponse sans calcul.

c) Déterminer les sous-espaces propres de A.

d) Résoudre l'équation $(A - I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

e) On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Déterminer trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = 2e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_3) = -2e_2 + e_3$$

On pourra utiliser la question précédente.

f) En déduire une matrice P telle que $A = PBP^{-1}$.

2) Étude de $\mathcal{N}$.

a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et sa dimension.

b) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout $(N, M) \in \mathcal{N}^2$. on a $NM \in \mathcal{N}$.

c) Calculer N^3 pour $N \in \mathcal{N}$.

3) Étude de $\mathcal{U}$.

a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On justifiera la réponse.

b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.

c) Montrer que $\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R}\ )$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4) Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$$

On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.

a) Calculer $B^{(\alpha)}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. où B est la matrice définie à la question 1.

b) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$.

c) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$U^{(\alpha)} U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$

d) En déduire que $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^{(n)} = \underbrace{U \times \ldots \times U}_{n \text{ fois}}$

e) Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geqslant 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$?

f) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.

5) **a)** En utilisant les résultats de la question 4 , expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique ?

b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice D).

FIN DE L'ÉPREUVE