Épreuve de Mathématiques 5

Correction

Exercice 1 (E3A PC 2022)

1) Par définition,

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array} \quad \text{et} \quad B = A - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

En matrices blocs, avec $J = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & J^T \\ J & I_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & J^T \\ J & 0_{n-1} \end{pmatrix}$$

2) Les matrices de f et g dans une base orthonormée sont *symétriques réelles* donc, d'après le théorème spectral,

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ sont diagonalisables dans une base orthonormée}}$$

3) Diagonalisation de f et de g dans une même base

a) On identifie $x \in \mathbb{R}^n$ et le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.

Ainsi, Im g est engendrée par les vecteurs colonnes de la matrice B. En notant $C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=2}^{n} e_i$,

$$\text{Im } g = \text{Vect}\,(C_1, e_1)$$

La famille (C_1, e_1) est génératrice par construction, et libre car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Par conséquent,

$$\boxed{\mathscr{B}_1 = (e_1, \sum_{i=2}^{n} e_i) \text{ est une base de Im } g\text{, et rg}\,(g) = 2}$$

Par le théorème du rang *(Normalement, c'est pavlovien)*

$$\dim(\text{Ker } g) = \dim E_n - \dim(\text{Im } g) = n-2$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker } g \iff BX = 0$$

$$\iff \begin{cases} x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 - \cdots - x_n \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 - \cdots - x_n \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=3}^n x_i(-e_2+e_i)$$

$$\iff X \in \text{Vect}\left((-e_2+e_i)_{3\leqslant i\leqslant n}\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{B}_2 = \Big(-e_2+e_i\Big)_{3\leqslant i\leqslant n} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

b) Soit $x \in \text{Im}\,(g)$ et $y \in \text{Ker } g$.
<u>Méthode 1 : par un calcul direct.</u> D'après la question précédente,

$$y = y_1 e_1 + y_2 \sum_{i=2}^n e_i \qquad \text{et} \qquad x = \sum_{i=3}^n x_i(-e_2+e_i)$$

Ainsi, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \langle y_1e_1 + y_2\sum_{i=2}^n e_i, \sum_{j=3}^n x_j(-e_2+e_j)\rangle \\
&= \langle y_1e_1, \sum_{j=3}^n x_j(-e_2+e_j)\rangle + \langle y_2\sum_{i=2}^n e_i, \sum_{j=3}^n x_j(-e_2+e_j)\rangle \\
&= \sum_{j=3}^n y_1x_j\langle e_1, -e_2+e_j\rangle + y_2\sum_{i=2}^n\sum_{j=3}^n x_j\langle e_i, -e_2+e_j\rangle \\
&= \sum_{j=3}^n y_1x_j\left(-\langle e_1,e_2\rangle + \langle e_1,e_j\rangle\right) + y_2\sum_{i=2}^n\sum_{j=3}^n x_j(-\langle e_i,e_2\rangle + \langle e_i,e_j\rangle)
\end{aligned}$$

Or $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$: pour tout $j \geqslant 2$, $\langle e_1, e_j\rangle = 0$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=3}^n y_1x_j \times 0 - y_2\left(\sum_{j=3}^n x_j\right)\sum_{i=2}^n\langle e_i,e_2\rangle + y_2\sum_{i=2}^n\sum_{j=3}^n x_j\langle e_i,e_j\rangle \\
&= -y_2\left(\sum_{j=3}^n x_j\right)\langle e_2,e_2\rangle + y_2\sum_{j=3}^n x_j\langle e_j,e_j\rangle \\
&= -y_2\sum_{j=3}^n x_j + y_2\sum_{j=3}^n x_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\text{Im } g \perp \text{Ker } g$.

Méthode 2 : par des méthodes d'algèbre bilinéaire.
La matrice de g dans une base orthonormée est symétrique, donc g est autoadjoint.
Soit $y' \in E_n$ tel que $y = g(y')$. Alors,

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \langle x, g(y')\rangle \\ &= \langle g(x), y'\rangle && \text{Car } g \text{ autoadjoint} \\ &= \langle 0, y'\rangle && \text{Car } x \in \mathrm{Ker}\ g \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}\ g \perp \mathrm{Ker}\ g$.
Ainsi, en particulier, $\mathrm{Im}\ g \cap \mathrm{Ker}\ g = \{0\}$.
De plus, par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}\ g + \dim \mathrm{Ker}\ g = \dim E_n$, donc $\mathrm{Im}\ g \oplus_\perp \mathrm{Ker}\ g = E_n$:

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(g) \text{ et } \mathrm{Ker}\,(g) \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } E_n}$$

c) Si 0 est valeur propre, le sous-espace propre pour la valeur propre 0 est

$$E_0 = \mathrm{Ker}\ g$$

Résultat important !
D'après la question 3a, $\dim \mathrm{Ker}\ g = n - 2$.
D'après la question 1, g est diagonalisable : dans une base $\mathscr{B}'$ de diagonalisation, la matrice de g s'écrira donc

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_1 & \\ & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Si λ_2 ou λ_3 est nulle, $\dim E_0 = \dim \mathrm{Ker}\ g > n - 2$ ce qui est absurde. Donc

$$\boxed{\text{Le spectre de } g \text{ est : } \mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\} \text{ où les deux réels } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont non nuls}}$$

De plus, la trace est invariante par changement de base, donc $\mathrm{Tr}\,(g) = \mathrm{Tr}\,(B) = \mathrm{Tr}\,(D)$, ce qui nous donne

$$\boxed{0 = \lambda_1 + \lambda_2}$$

d) i) Méthode 1

A. Comme g commute avec lui-même, d'après le cours,

$$g(\mathrm{Im}\ g) \subset \mathrm{Im}\ g \quad \text{et} \quad g(\mathrm{Ker}\ g) \subset \mathrm{Ker}\ g$$

On peut aussi refaire la preuve sur le modèle de la question de cours : $x = g(x') \in g(\mathrm{Im}\ g)$ appartient à $\mathrm{Im}\ g$, et $x = g(x') = 0 \in \mathrm{Ker}\ g$ si $x' \in \mathrm{Ker}\ g$.

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Im}(g) \text{ et } \mathrm{Ker}(g) \text{ sont stables par } g}$$

B. Soit $e'_1 = e_1$ et $e'_2 = \sum_{i=2}^{n} e_i$.

- $g(e_1) = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e'_2$
- $g(e'2) = B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n-1)e_1$

Donc

$$\boxed{C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g(e_1) & g(e'_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e'_2 \end{array}}$$

C. $\chi_C(x) = \begin{vmatrix} x & -(n-1) \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 - (n-1) = (x - \sqrt{n-1})(x + \sqrt{n-1})$.

Donc les valeurs propres de C sont
- $\lambda = \sqrt{n-1}$ de multiplicité $\alpha = 1$
- $\lambda = -\sqrt{n-1}$ de multiplicité $\alpha = 1$

Sous-espaces propres : pour $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$,

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1} = \operatorname{Ker}(\lambda_1 I_2 - C) &\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff x + \lambda_1 y = 0 \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -\lambda_1 y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_{\sqrt{n-1}} = \operatorname{Vect}(-\sqrt{n-1}e_1 + e'_2)}$$

Pour $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$ le calcul est identique, et

$$\boxed{E_{-\sqrt{n-1}} = \operatorname{Vect}(\sqrt{n-1}e_1 + e'_2)}$$

Les sous-espaces propres de h sont des sous-espaces vectoriels de $\operatorname{Im} g$: l'identification à $\mathbb{R}^2$ est nettement moins évidente ! Le plus simple est de les donner comme sous-espaces vectoriels de $E_n = \mathbb{R}^n$.

D. Comme $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par g (question A), et que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires (question b), dans la base $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ adaptée à cette somme directe la matrice de g est diagonale blocs :

$$\operatorname{Mat}(g, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Où C' est la matrice de l'endomorphisme induit par g sur $\operatorname{Ker} g$, donc $C' = 0$; et C la matrice ci-dessus.

D'après la question C, C est diagonalisable et

$$C = P \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{n-1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donc, en prenant $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{Mat}(g, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & PDP^{-1} \end{pmatrix} = \widetilde{P} \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & \sqrt{n-1} & 0 \\ & 0 & -\sqrt{n-1} \end{array} \right) \widetilde{P}^{-1}$$

Ainsi, comme $\lambda_1 > 0$ par choix,

$$\boxed{\lambda_1 = \sqrt{n-1} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\lambda_2}$$

ii) Méthode 2

A. Comme g est diagonalisable, dans une base $\mathscr{B}'$ de diagonalisation la matrice de g sera

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_1 & \\ & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Puis celle de g^2 sera $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_1^2 & \\ & & & & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le spectre de } g^2 = g \circ g \text{ est : } \mathbf{Sp}\left(g^2\right) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}}$$

B. La matrice de g^2 dans la base canonique est, avec J comme à la question 1,

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & J^T \\ J & 0_{n-1} \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 + J^T J & 0 \\ 0 & JJ^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

C. Comme la trace est la somme des valeurs propres avec multiplicité, d'après le calcul effectué à la question C *(et non d'après le résultat de la question C...)*,

$$\boxed{\text{Tr } B^2 = 2(n-1) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

D. Nous avons le système : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2(n-1) \end{cases}$

La première équation donne $\lambda_2 = -\lambda_1$, et la seconde s'écrit alors

$$2\lambda_1^2 = 2(n-1)$$

Comme $\lambda_1 > 0$, il vient $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$. Conclusion :

$$\boxed{\lambda_1 = \sqrt{n-1} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\lambda_1 = -\sqrt{n-1}}$$

e) Cherchons une base de vecteurs propres de g : d'après la question d.i.C,

$$-\sqrt{n-1}e_1 + e_2' = \begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_1 = \sqrt{n-1}$.

De même, $\sqrt{n-1}e_1 + e_2' = \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$.

Par construction, ces deux vecteurs forment une base de Im g.

Comme $E_n = \text{Im } g \oplus \text{Ker } g$, on peut compléter cette base de Im g en une base de E_n à l'aide d'une base de Ker g, par exemple $\mathscr{B}_2$:

$$\mathscr{B}_2 = \big(-e_2 + e_i\big)_{3 \leqslant i \leqslant n} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi, une base de vecteurs propres de g est

$$\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

D'où la matrice de passage associée

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} & \sqrt{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{n-2} & \\ 1 & 1 & & & \end{pmatrix}}$$

f) Comme $A = B + I_n$,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}BP + P^{-1}I_nP \\ &= P^{-1}BP + I_n \end{aligned}$$

qui est diagonale comme somme de matrices diagonales.

C'est une question « de conclusion » assez facile, si on a l'exercice bien en tête : ne pas laisser trop vite de côté ce type de question.

Exercice 2 (CCINP PC 2022)

Partie I - Généralités sur l'application φ

Q1. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Le théorème de la division euclidienne s'écrit, avec $U = AP$ et $V = B \neq 0$ (car $\deg(B) = n+1$),

$$AP = BQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(B) = n+1)$$

Donc $\varphi(P) = 0$ ou $\deg(\varphi(P)) \leqslant n$:

$$\boxed{\text{Pour tout polynôme } P \in \mathbb{C}_n[X], \text{ on a } \varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]}$$

Q2. Par construction,
$$A(P_1+\lambda P_2) = B(Q_1+\lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2$$
et, par stabilité de $\mathbb{C}_n[X]$ par combinaison linéaire, $R_1+\lambda R_2 \in \mathbb{C}_n[X]$.
Par unicité du couple $(Q,R) \in \mathbb{C}[X]\times\mathbb{C}_n[X]$ de la division euclidienne, le quotient et le reste de la division de $A(P_1+\lambda P_2)$ par B sont
$$\boxed{Q = Q_1+\lambda Q_2 \quad \text{et} \quad R = R_1+\lambda R_2}$$
Il faut impérativement parler du **degré** *de $R_1+\lambda R_2$: sinon, on pourrait écrire $Q = Q_1+\lambda Q_2+1$ et $R = R_1+\lambda R_2 - B$, qui vérifient aussi $AP = BQ+R$. Puis de l'***unicité** *du couple.*

Nous venons donc de prouver que φ est linéaire :
$$\varphi(P_1+\lambda P_2) = \varphi(P_1) + \lambda\varphi(P_2)$$
Comme, de plus, d'après Q1, $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$,
$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_n[X])}$$

Partie II - Étude d'un premier exemple

Q3.

- $\varphi(1)$ est le reste de la division euclidienne de $A\times 1 = A$ par B, c'est-à-dire de X^2+2X par B de degré 3 :
$$A = B\times 0 + A$$
Donc $\varphi(1) = A = 2X + X^2$.
- $\varphi(X)$ est le reste de la division de $AX = X^3+2X^2$ par $B = X^3+X^2-X-1$
$$AX = X^3+2X^2 = X^2+X^2-X-1+(X^2+X+1)$$
Donc $\varphi(X) = 1+X+X^2$.
- $\varphi(X^2)$ est le reste de la division de $AX^2 = X^4+2X^3$ par $B = X^3+o(X^3)$:
$$\begin{aligned} AX^2 &= XB - XB + AX^2 \\ &= XB + X^3+X^2+X && \textit{grâce à } \varphi(X) \textit{ car } AX^2 = AX\times X \\ &= XB + B - B + X^3+X^2+X \\ &= B(X+1) + 2X+1 \end{aligned}$$
Donc $\varphi(X^2) = 1+2X$.

Ainsi,
$$\boxed{M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}}$$

Q4. Polynôme caractéristique : *Commencer par $L_1+L_2+L_3$ semble plus astucieux.*

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -2 & x-1 & -2 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$$
$$= \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -x-1 \\ -2 & x-1 & -2 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} \qquad C_3 \longleftarrow C_3 + C_1$$
$$= (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & x-1 & -4 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_M(x) &= (x+1)\begin{vmatrix} x-1 & -4 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)\left[(x-1)^2-4\right] \\ &= (x+1)(x-1-2)(x-1+2) \\ &= (x-3)(x+1)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de M sont

- $\lambda = 3$ de multiplicité $\alpha = 1$,
- $\lambda = -1$ de multiplicité $\alpha = 2$.

Sous-espaces propres :

- Calcul de $E_3 = \operatorname{Ker}(3I_3 - M) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \iff \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \\ -x - y + 3z = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = y - z = z \\ y = 2z \end{cases}$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\iff X \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_3 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

- Calcul de $E_{-1} = \operatorname{Ker}(-I_3 - M) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid MX = -X\}$.

Comme $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifient $MX = -X$, ce sont des vecteurs de E_{-1}.

Comme X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires, et que $\dim E_{-1} \leqslant \alpha = 2$, (X_1, X_2) est une base de E_{-1} :

$$\boxed{E_{-1} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$$

Q5. D'après ci-dessus, $\dim E_3 + \dim E_{-1} = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{C}^3$, donc, par théorème de diagonalisation,

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable}}$$

Une base de vecteur propre pour la matrice M est

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Or M est la matrice de φ dans la base $(1, X, X^2)$: une base de $\mathbb{C}_2[X]$ de vecteurs propres est

$$\boxed{(1 + 2X + X^2, 1 - X^2, X - X^2)}$$

On demande une base de vecteurs propres de $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, qui vivent donc dans l'espace $E = \mathbb{C}_2[X]$.

Partie III - Étude d'un second exemple

Q6. On cherche le reste $R = \varphi(AP)$ de degré $< \deg B = 3$:

- $A = 0 \times B + A$, donc $\varphi(1) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.
- $AX = \gamma B + \alpha X + \beta X^2$, donc $\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2$.
- $AX^2 = (\gamma X + \beta)B + \alpha X^2$, donc $\varphi(X^2) = \alpha X^2$.

$$\boxed{T = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}}$$

Q7. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons T diagonalisable. Comme T est triangulaire, les valeurs propres se lisent sur la diagonale : $\lambda = \alpha$ est valeur propre de multiplicité 3.

On peut aussi calculer $\chi_T(x) = \det(xI_3 - T) = \begin{vmatrix} x-\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & x-\alpha & 0 \\ -\gamma & -\beta & x-\alpha \end{vmatrix} = (x-\alpha)^3$.

Le calcul du déterminant d'une matrice triangulaire doit être instantané.

Comme T est diagonalisable, il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$T = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} = P(\alpha I_3)P^{-1} = \alpha P P^{-1} = \alpha I_3$$

Ainsi, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$: $A = \alpha$ est un polynôme constant.

On peut aussi calculer le sous-espaces propres, et constater que $\dim E_\alpha = 3$ *si et seulement si* $\beta = \gamma = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si A est constant, $\beta = \gamma = 0$. Ainsi, T est diagonale, donc diagonalisable.

Ainsi,

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable si et seulement si le polynôme } A \text{ est constant}}$$

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Q8. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Comme $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$, et $L_j(x_j) = 1$, il vient

$$\begin{aligned} D(x_j) &= P(x_j) - \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i(x_j) \\ &= P(x_j) - P(x_j)L_j(x_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{x_0, \ldots, x_n \text{ sont des racines du polynôme } D = P - \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i}$$

Q9. Comme, pour tout i, $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$, D est de degré au plus n.
Or D admet au moins $n+1$ racines *distinctes*, les $x_0, \ldots, x_n$.
Donc $D = 0$:

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i}$$

Q10. *On peut aussi montrer que la famille est libre (comme dans le cours : combinaison linéaire évaluée en les* x_i*).*
D'après la question **Q9**, la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$. Or $\operatorname{Card}(L_0, \ldots, L_n) = n + 1 = \dim \mathbb{C}_n[X]$. Donc

$$\boxed{(L_0, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X]}$$

Ces 3 questions relèvent de la question de cours. Il faut *savoir les faire.*

Q11. Par définition de la division euclidienne,

$$AL_k = BQ_k + R_k$$

Comme x_j est racine de B, il vient

$$A(x_j)L_k(x_j) = B(x_j)Q_k(x_j) + R_k(x_j) = R_k(x_j)$$

Or $L_k(x_j) = \delta_{kj} = 1$ si $j = k$, 0 sinon, donc il reste

$$\boxed{R_k(x_j) = 0 \text{ si } j \neq k \text{ et } R_k(x_k) = A(x_k)}$$

Q12. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Par définition, $\varphi(L_k) = R_k$.
D'après la question **Q9**, $R_k = \sum_{i=0}^{n} R_k(x_i)L_i$.
Savoir appliquer le résultat d'une question, surtout lorsqu'on vous indique la question.
D'après la question **Q11**, $R_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$, et $R_k(x_k) = A(x_k)$. D'où $R_k = A(x_k)L_k$. Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \varphi(L_k) = A(x_k)L_k}$$

Q13. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $L_k \neq 0$, donc l'égalité précédente signifie que L_k est un vecteur propre de l'endomorphisme φ pour la valeur propre $A(x_k)$.
Or, d'après la question **Q10**, $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$: c'est donc une base de vecteurs propres de φ. Finalement,

$$\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}\,(\varphi) = \{A(x_k) \ \mid \ k \in [\![0, n]\!]\}}$$

Au-delà des notations, il faut savoir reconnaître $f(x) = \lambda x$. Et ne pas perdre de vue qu'avoir une base de vecteurs propres suffit à diagonaliser – c'est ce que vous faites à la question 4.

Exercice 3 (d'après CCP PC 2010 ou E3A PSI 2021)

Partie I - Étude d'un exemple

1) A est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral,

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable dans une base orthonormée}}$$

2) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}(m) : \quad J^m = 3^{m-1}J$$

est vraie pour tout $m \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_m \Longrightarrow \mathcal{H}_{m+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(m)$ vraie. $J^2 = 3J$, donc $J^{m+1} = 3^{m-1}JJ = 3^mJ$, donc $\mathcal{H}(m+1)$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall m \geqslant 1 \quad J^m = 3^{m-1}J}$

3) En termes d'applications linéaires, la question précédente s'écrit $j^m = 3^{m-1}j$ pour tout $m \geqslant 1$. Ainsi, puisque $f = \mathrm{id} + j$ et que j et id commutent, la formule du binôme nous donne, pour $m \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} f^m &= (\mathrm{id} + j)^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} j^k \, \mathrm{id}^{\,n-k} \\ &= \mathrm{id} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^{k-1} j \\ &= \mathrm{id} + \frac{1}{3}\left(-1 + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 3^k\right) j \quad \textit{Factoriser par } \frac{1}{3} \textit{ et rajouter le terme en } k=0 \textit{ : le binôme réapparaît.} \\ &= \mathrm{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j \end{aligned}$$

Cette relation est encore vérifiée en 0, ainsi

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \quad f^m = \mathrm{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j}$$

On peut aussi prouver cette relation par récurrence.

4)

$$\begin{aligned} \chi_f(x) &= \det(x\,\mathrm{id} - f) \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \qquad C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -1 \\ x-4 & x-2 & -1 \\ x-4 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\ &= (x-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)^2(x-4) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{f \text{ admet deux valeurs propres distinctes, } \lambda = 1 \text{ et } \mu = 4}$$

5) **a)** D'après la question 3, pour tout $m \geqslant 1$, $f^m = \left(\mathrm{id} - \frac{1}{3}j\right) + 4^m \left(\frac{1}{3}j\right)$, donc les p et q suivant conviennent :

$$\boxed{p = \mathrm{id} - \frac{1}{3}j \text{ et } q = \frac{1}{3}j}$$

b) *Ceci est une preuve typique d'unicité. On ne peut pas conclure immédiatement à partir de $(p_1 - p_2) + 4^m(q_1 - q_2) = 0$ sans arguments.*

Soit (p_1, q_1) et (p_2, q_2) deux couples d'endomorphismes vérifiant $\forall m \in \mathbb{N} \quad f^m = p_i + 4^m q_i$.
Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N} \quad (p_1 - p_2) + 4^m(q_1 - q_2) = 0$, et en particulier pour $m = 0$ et $m = 1$:

$$\begin{cases} (p_1 - p_2) + (q_1 - q_2) = 0 \\ (p_1 - p_2) + 4(q_1 - q_2) = 0 \end{cases}$$

Et en résolvant ce système, on trouve $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$. Donc

$$\boxed{\text{Ce couple est unique}}$$

c) Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\alpha p+\beta q=0$. D'après d)i., il vient

$$0=\alpha p+\beta q=\alpha\left(\mathrm{id}-\frac{1}{3}j\right)+\beta\left(\frac{1}{3}j\right)=\alpha\,\mathrm{id}+(\beta-\alpha)\frac{1}{3}j$$

Or, vu leurs matrices, id et j ne sont pas colinéaires, donc $\alpha=0$ et $\beta=\alpha=0$.
Conclusion : $\boxed{(p,q) \text{ forme une famille libre}}$

d) $p^2=\mathrm{id}-\frac{2}{3}j+\frac{1}{9}(3j)=\mathrm{id}-\frac{1}{3}j=p$ et $q^2=\frac{1}{9}(3j)=q$. Donc

$$\boxed{p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs}}$$

$p\circ q=(\mathrm{id}-\frac{1}{3}j)\circ(\frac{1}{3}j)\quad=\frac{1}{j}-\frac{1}{9}(3j)=0$
Et p et q commutent comme polynômes en j :

$$\boxed{q\circ p=q\circ p=0}$$

6) Racines carrées de f.

a) Soit $h=\alpha p+\beta q$, avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Comme $pq=qp=0$,

$$h^2=(\alpha p+\beta q)^2=\alpha^2p^2+\beta^2q^2=\alpha^2p+\beta^2q$$

Donc $h^2=f$ équivaut à $\alpha^2p+\beta^2q=p+4q$ (par construction de p et q). Or (p,q) est libre, donc $\alpha^2=1$ et $\beta^2=4$. En conclusion les h qui conviennent sont les suivants

$$\boxed{p+2q,\quad -p+2q,\quad p-2q\quad\text{et}\quad -p-2q}$$

b)
- $\underline{E_1}$: Soit $x\in\mathbb{R}^3$ de matrice colonne $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

  Le système $(I_3-A)X=0$ s'écrit $x_1+x_2+x_3=0$. Ainsi

$$\boxed{E_1=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)}$$

- $\underline{E_4}$: D'après le polynôme caractéristique, $\dim E_4=1$. Un calcul direct montre que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 4, donc $\boxed{E_4=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$

En conclusion,

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable dans la base de vecteurs propres } \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).}$$

Pour calculer les matrices de p et q, on écrit $\mathrm{id}=p+q$ et $f=p+4q=\mathrm{id}+3q$.
Donc $q=\frac{1}{3}(f-\mathrm{id})$ et $p=\mathrm{id}-q$.

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\quad \mathrm{Mat}\,(q,\mathscr{B}')=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \mathrm{Mat}\,(p,\mathscr{B}')=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

c) $\boxed{K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)}$ *(il faut raisonner par blocs)*

d) Soit h l'endomorphisme de matrice Y dans la base $\mathscr{B}'$ des vecteurs propres. Par construction, $Y^2 = D$, ce qui se traduit par $h^2 = f$ en termes d'endomorphismes. Or $h = \alpha p + \beta q$ signifie $\beta = 2$ et K diagonale, ce qui n'est pas le cas.

Donc $\boxed{h \text{ vérifie } h^2 = f \text{ mais n'est pas combinaison linéaire de } p \text{ et } q}$

Partie II - Généralisation : cas de deux valeurs propres

1)
$$\begin{aligned}(f - \lambda\,\mathrm{id}\,) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}\,) &= f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda\mu\,\mathrm{id} \\ &= \lambda^2 p + \mu^2 q - (\lambda + \mu)(\lambda p + \mu q) + \lambda\mu(p + q) \\ &= 0\end{aligned}$$
Ainsi $P(X) = (X - \lambda)(X - \mu)$ annule f :

$$\boxed{(f - \lambda\,\mathrm{id}\,) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}\,) = 0}$$

Or P est un polynôme scindé à racines simples : $\lambda \neq \mu$. Donc, par théorème de diagonalisation,

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

2) Comme $P(f) = 0$, les valeurs propres sont des racines de P : $\mathrm{Sp}\,(f) \subset \{\lambda, \mu\}$.
Si μ n'est pas une valeur propre de f, comme f est diagonalisable, on a $f = \lambda\,\mathrm{id}\,$.
De plus $f = \lambda(\mathrm{id}\, - q) + \mu q = \lambda\,\mathrm{id}\, + (\mu - \lambda)q$. Donc $(\mu - \lambda)q = 0$. Or $\mu - \lambda \neq 0$, donc $q = 0$.
Ce qui est exclu : « q non nul ». C'est donc absurde.
Donc μ est une valeur propre de f.
De même, par un raisonnement par l'absurde, comme $p \neq 0$, λ est valeur propre de f. Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(f) = \{\lambda, \mu\}}$$

3) $\boxed{f - \lambda\,\mathrm{id}\, = \lambda p + \mu q - \lambda p - \lambda q = (\mu - \lambda)q.}$ De même $\boxed{f - \mu\,\mathrm{id}\, = (\lambda - \mu)p.}$

4) $0 = (f - \lambda\,\mathrm{id}\,) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}\,) = (\mu - \lambda)q \circ (\lambda - \mu)p = -(\mu - \lambda)^2 q \circ p$. Or $\lambda \neq \mu$, donc $\boxed{q \circ p = 0.}$
De même, $\boxed{p \circ q = 0}$.
Par définition, $p = \mathrm{id}\, - q$, donc $0 = p \circ q = (\mathrm{id}\, - q) \circ q = q - q^2$. Ainsi, $\boxed{q^2 = q}$. De même, $\boxed{p^2 = p}$

$$\boxed{p \text{ et } q = \mathrm{id}\, - p \text{ sont des projecteurs, } pq = qp = 0}$$

Montrons que $\mathrm{Ker}\ q = \mathrm{Im}\ p$:

$\boxed{\subset}$
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}\ q &\implies q(x) = 0 \\ &\implies x - p(x) = 0 \qquad (\text{car } q = \mathrm{id}\, - p) \\ &\implies x = p(x) \\ &\implies x \in \mathrm{Im}\ p \end{aligned}$$
Donc $\mathrm{Ker}\ q \subset \mathrm{Im}\ p$.

$\boxed{\supset}$
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Im}\ p &\implies \exists y \in E\ x = p(y) \\ &\implies \exists y \in E\ q(x) = q \circ p(y) = 0 \qquad (\text{car } q \circ p = 0) \\ &\implies q(x) = 0 \\ &\implies x \in \mathrm{Ker}\ q \end{aligned}$$
Donc $\mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Ker}\ q$.

En conclusion $\boxed{\mathrm{Ker}\ q = \mathrm{Im}\ p}$

5) *f est inversible $\iff$ f est injectif $\iff$ $E_0 = \operatorname{Ker} f = \{0\}$ $\iff$ $0 \notin \operatorname{Sp}(f)$. Donc λ et μ non nuls permet de conclure immédiatement. Mais, comme on nous demande f^{-1}, calculons le.*

Soit $g = \frac{1}{\lambda}p + \frac{1}{\mu}q$.

$$\begin{aligned} f \circ g &= (\lambda p + \mu q)\left(\frac{1}{\lambda}p + \frac{1}{\mu}q\right) \\ &= \lambda\frac{1}{\lambda}p^2 + \mu\frac{1}{\mu}q^2 && \text{Car } pq = qp = 0 \\ &= p + q = \mathrm{id} \end{aligned}$$

Donc, comme f est un endomorphisme, g est un inverse de f :

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme, et } f^{-1} = \frac{1}{\lambda}p + \frac{1}{\mu}q}$$

6)

7) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}(m) : \quad f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

est vraie pour tout $m \geqslant 0$.

- <u>$\mathcal{H}_0$</u> est vraie par hypothèse : $\mathrm{id} = p + q$.
- <u>$\mathcal{H}_m \Longrightarrow \mathcal{H}_{m+1}$</u> : Supposons $\mathcal{H}(m)$ vraie.

$$f^{m+1} = (\lambda^m p + \mu^m q)(\lambda p + \mu q) = \lambda^{m+1}p + \mu^{m+1}q$$

  Donc $\mathcal{H}(m+1)$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall m \geqslant 0 \qquad f^m = \lambda^m p + \mu^m q}$

Le résultat que l'on vient de prouver appliqué à $f^{-1} = \lambda' p + \mu' q$, avec $\lambda' = 1/\lambda$ et $\mu' = 1/\mu$ s'écrit

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad (f^{-1})^m = \lambda'^m p + \mu'^m q = \lambda^{-m}p + \mu^{-m}q$$

En conclusion : $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{Z},\ f^m = \lambda^m p + \mu^m q.}$

Partie III - Cas général

1) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$, donc en sommant sur k

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)p_i$$

(Lorsqu'on a une double somme (finie !) et qu'on ne sait pas quoi faire, dans le doute, intervertir.)

Conclusion : $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)p_i}$

2) Soit

$$P = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$$

Le polynôme P est scindé, à racines simples car les λ_i sont 2 à 2 distincts.

De plus, $P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)p_i = \sum_{i=1}^{m} 0 \times p_i = 0$ Ainsi, f admet un polynôme annulateur à racines simples :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

3) Soit $\ell \in \{1, \dots m\}$. L_ℓ est un polynôme d'interpolation de Lagrange : $L_\ell(\lambda_i) = 1$ si $i = \ell$ et 0 sinon. La propriété montrée au 1 s'écrit donc

$$\boxed{L_\ell(f) = \sum_{i=0}^{m} L_\ell(\lambda_i) p_i = p_\ell}$$

D'après 2),

$$\begin{aligned}
(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \circ L_\ell(f) &= (f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \circ \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} \frac{1}{\lambda_\ell - \lambda_j} (f - \lambda_j \,\mathrm{id}\,) \\
&= \alpha \left[(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \circ \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} (f - \lambda_j \,\mathrm{id}\,) \right] \qquad \text{Avec } \alpha = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} \frac{1}{\lambda_\ell - \lambda_j} \in \mathbb{R} \\
&= \alpha P(f) = 0 \qquad \text{Où } P \text{ est le polynôme annulateur de la question 2}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après ci-dessus, $(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \circ p_\ell = 0$. En particulier, pour tout $x \in E$, $(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,)(p_\ell(x)) = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(p_\ell) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,)}$$

<u>Détermination du spectre de f</u> :
Le polynôme de la question 2) annule f, donc les valeurs propres sont parmi ses racines.
Réciproquement, pour tout $\ell \in \{1, \dots, \ell\}$, $p_\ell \neq 0$ par hypothèse, donc Im $p_\ell \neq \{0\}$, et

$$E_{\lambda_\ell} = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell \,\mathrm{id}\,) \neq \{0\}$$

puisqu'on vient de montrer qu'il contient Im p_ℓ. Donc λ_ℓ est valeur propre. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}.}$$

4) Si $i \neq j$,

$$p_i p_j = L_i(f) L_j(f) = P(f) Q(f) = 0$$

Avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.

Si $i = j$, de même qu'en partie 2, on utilise le résultat ci-dessus et id $= \sum_{k=1}^{m} p_k$:

$$p_i = \sum_{k=1}^{m} p_i p_k = p_i^2$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, m]\!], \quad p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j. \end{cases}}$$

5) Comme $\mathrm{Sp}\,(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ et f diagonalisable,

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \,\mathrm{id}\,) = E}$$

Soit $i \in [\![1, m]\!]$. Dans une base adaptée à cette somme directe, notons D la matrice de f.

La matrice $P_i = L_i(D)$ de $p_i = L_i(f)$ est diagonale (polynôme en une matrice diagonale) et a des 0 sur la diagonale pour les colonnes correspondants à des vecteurs $e_k \notin E_{\lambda_i}$, et 1 si $e_k \in E_{\lambda_i}$.

Donc p_i est le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

6) Dans ce cas, $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$, où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.

Soit $(q_1, \ldots, q_m)$ les projecteurs associés à cette somme directe : p_i est le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

La matrice A de u dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à cette somme directe est diagonale : la base sera une base de vecteurs propres. Si on note Q_i les matrices de q_i dans $\mathscr{B}$, elles seront aussi diagonales, avec des 1 ou des 0 sur la diagonale (selon que les $e_k \in E_i$ ou non).

Ainsi, $A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j Q_j$, et plus généralement,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad A^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k Q_j$$

Ce qui s'écrit, en terme d'endomorphismes,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k q_j}$$

Autre méthode : u agit comme une homothétie sur chaque E_i donc la formule est vraie pour $k = 1$ (ou via les matrices). Puis on utilise $p_i p_j = 0$ si $i \neq j$, et $p_i^2 = p_i$, pour montrer la formule ci-dessus par récurrence à partir de la formule en $k = 1$. Vous choisissez ce qui vous semble le plus clair.

FIN DE L'ÉPREUVE

Remarques et points importants

Généralité : sachez rester 4h. Ça s'apprend, c'est important : combien de fois, une fois face au corrigé, vous vous êtes dit « cette question, je savais la faire, je ne l'ai pas abordée » ? Ou « j'aurais pu détecter cette erreur en me relisant » ? Il faut impérativement utiliser tout le temps disponible.

Les polynômes de Lagrange sont une nouveauté du programme 2021 : il peut être intéressant de regarder l'exercice 2 partie IV, et l'exercice 3.

Exercice 1

- Le résultat suivant sert dans la question **3c**, qui bloque le reste de l'exercice si elle est fausse.
  Si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors
  $$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(0 \operatorname{id}_E - f) = E_0}$$
  C'est *important*. Si $E_0 \neq \{0\}$, alors $0 \in \operatorname{Sp}(f)$, et on a une partie du spectre.
- L'inégalité $\dim E_\lambda \leqslant \alpha$ se lit comme une minoration de α : on a pour valeurs propres, complexes et comptées avec multiplicité,
  $$(\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_{\alpha \text{ fois}}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-\alpha})$$
  avec $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-\alpha}$ éventuellement égaux entre eux ou à λ. *Il y a au total $n = \dim E$ éléments sur la diagonale de la matrice triangulaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, donc si on en a trouvé α, il en reste $n - \alpha$ à trouver.*

  Ici, $\dim E_0(g) = \dim \operatorname{Ker} g = n - 2$, donc le spectre avec multiplicité sera $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2 \text{ fois}}, \lambda_1, \lambda_2)$
- Le résultat $\operatorname{Tr} A^m = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m$ peut être un résultat intéressant à connaître – avec sa démonstration : on trigonalise A (quitte à se placer sur $\mathbb{C}$).

Exercice 2

Q2 Division euclidienne de A par B. Ce n'est pas parce que vous avez écrit $A = BQ + R$, que vous avez le quotient et le reste : $A = B \times 0 + A$, ou $A = B \times 1 + (A - B)$, ou .. ?
La condition $\deg R < \deg B$ et l'unicité du couple (Q, R) doivent impérativement être vérifiée et cité.
Analogue dans $\mathbb{Z}$: $11 = 3 \times 2 + 5$, ça y est, j'ai fait la division euclidienne de 11 par 3 ?

Q5 Une base de $\mathbb{C}_2[X]$. Donc des ... polynômes. Est-ce que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a une tête de polynôme ? cf. exercice 6 feuille matrices.

Q7 Diagonalisable, pas diagonale ! Il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $T = PDP^{-1}$. Ni plus, ni moins.

Q9 Attention, bien préciser que $\deg D \leqslant n$ et D admet $n + 1$ racines 2 *à* 2 *distinctes*.

Exercice 3 (Décomposition spectrale)

Même sous pression, même en fin d'épreuve, savoir :

- La formule du binôme *(vous savez développer $(a + b)^2$: vérifiez avec $n = 2$)* ou faire une récurrence : I.3 ;
- Montrer qu'une famille est libre : I.5c, en utilisant I.5a ;
- Développer $(X - \lambda)(X - \mu)$: II.1.
- Appliquer le critère de diagonalisation avec un polynôme annulateur : II.1, III.2.