Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 29 novembre 2021

Épreuve de Mathématiques 5

Correction

Exercice 1 (ECE – HEC)

L'application f est donc $f : X \mapsto MX$.

1) Ker f :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \iff M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{cases} y/m + z/m^2 = 0 \\ mx + z/m = 0 \\ m^2x + my = 0 \end{cases}$$

Les fractions, c'est compliqué : s'en débarrasser autant que possible.

$$\iff \begin{cases} my + z = 0 \\ m^2x + z = 0 \\ m^2x + my = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} my + z = 0 \\ m^2x + z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$$

$$\iff x = y = z = 0$$

Donc $\boxed{\text{Ker } f = \{0\}}$

Im f : Ainsi, f est injective. Or f est un endomorphisme en dimension finie, donc f est bijective, et en particulier surjectif : $\boxed{\text{Im } f = \mathbb{R}^3}$

Comme f est bijectif,

$$\boxed{\text{la matrice } M \text{ est inversible}}$$

2) $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = 2I + M$.

Ainsi, $M^2 - M = 2I$, puis on fait apparaitre N telle que $MN = NM = I$:

$$M\Big(\frac{1}{2}(M-I)\Big) = \Big(\frac{1}{2}(M-I)\Big)M = I$$

Donc, par définition de l'inverse M^{-1} de M, $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{2}(M-I)}$

3) a) $\boxed{\text{Mat}\,(p) = \frac{1}{3}(M+I) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 1 & 1/m \\ m^2 & m & 1 \end{pmatrix}}$

Après calculs, $(\text{Mat}\,(p))^2 = \text{Mat}\,(p)$ donc $p^2 = p$: $\boxed{p \text{ est un projecteur}}$

On peut bien entendu utiliser la relation $M^2 = 2I + M$ pour en déduire $(\text{Mat}\,(p))^2$.

<u>Ker p</u> :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker} p \iff \operatorname{Mat}(p)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

$$\iff \begin{cases} m^2x+my+z=0\\ m^2x+my+z=0\\ m^2x+my+z=0\end{cases}$$

$$\iff X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\-m^2x-my\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\-m^2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-m\end{pmatrix}\in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-m^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-m\end{pmatrix}\right)$$

Donc $\boxed{\operatorname{Ker} p=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-m^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-m\end{pmatrix}\right)}$

<u>Im p</u> : D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg} p=\dim \operatorname{Im} p=\dim \mathbb{R}^3-\dim \operatorname{Ker} p=3-2=1$.

Rappel : l'image est engendrée par les vecteurs colonnes.

$$\operatorname{Im} \operatorname{Mat}(p)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\m\\m^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/m\\1\\m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/m^2\\1/m\\1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\m\\m^2\end{pmatrix}\right)$$

Ce qui est cohérent avec le résultat trouvé par le théorème du rang.

(Après avoir calculé la dimension de $\operatorname{Im} p$, il suffisait de prendre un vecteur colonne non nul de $\operatorname{Mat}(p)$ pour avoir une base de $\operatorname{Im} p$.)

b) De même, on trouve $\boxed{\operatorname{Mat}(q)=-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1/m&1/m^2\\m&-2&1/m\\m^2&m&-2\end{pmatrix}}$ puis, $(\operatorname{Mat}(q))^2=\operatorname{Mat}(q)$ donc $q^2=q$:

$$\boxed{q \text{ est un projecteur}}$$

On peut remarquer que $p+q=\mathrm{id}$ donc $q=\mathrm{id}-p$: q est le projecteur sur $\operatorname{Ker} p$ parallèlement à $\operatorname{Im} p$.

c) Par un calcul matriciel, $\boxed{p\circ q=0}$ et $\boxed{q\circ p=0}$.

Pour $n=0$, par définition, $\boxed{p^0=q^0=\mathrm{id}_E}$

Pour $n\geqslant 1$, $\boxed{p^n=p}$ par récurrence ($p^{n+1}=p^n\circ p=p\circ p=p$), et de même $\boxed{q^n=q}$.

d) *Ici, on a une sorte de système linéaire (2×2) à inverser. On pouvait aussi partir de $\mathrm{id}_E=p+q$ de la définition de p ou q.*

$$\begin{cases} p &=& 1/3(f+\mathrm{id})\\ q &=& -1/3(f-2\,\mathrm{id})\end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} f+\mathrm{id} &=& 3p\\ f-2\,\mathrm{id} &=& -3q\end{cases}$$

$$\implies 3f=6p-3q$$

$$\implies f=2p-q$$

Comme $pq=qp$ $(=0)$, on peut appliquer la formule du binôme :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad f^n=(2p-q)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k(-1)^{n-k}p^kq^{n-k}$$

Or, dès que $k\neq 0$ et $n-k\neq 0$, un produit pq nul apparaît donc $2^k(-1)^{n-k}p^kq^{n-k}=0$.

Ainsi il reste :

$$\boxed{f^0 = \mathrm{id}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f^n = 2^n p + (-1)^n q}$$

e) En exprimant p et q en fonction de f et id, la formule précédente nous donne

$$f^n = 2^n p + (-1)^n q = \frac{2^n}{3} f + \frac{2^n}{3}\,\mathrm{id} - \frac{(-1)^n}{3} f + \frac{2(-1)^n}{3}\,\mathrm{id} = \frac{2^n - (-1)^n}{3} f + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}\,\mathrm{id}$$

Matriciellement, cette égalité s'écrit $\boxed{M^n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} M + \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3} I}$

Donc $a_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$ et $b_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$.

f) D'après 2), $f = \dfrac{1}{2}(f - \mathrm{id}) = \dfrac{(}{2}p - q - (p+q)) = \dfrac{1}{2}(p - 2q) = 2^{-1}p - q$.

Donc par des calculs identiques à ceux de la question d), en remplaçant 2 par 1/2, on montre que la formule précédente reste valable si $n \in \mathbb{Z}$.

Dans le chapitre « Réduction », on verra que f aurait eu une matrice diagonale dans une base bien choisie, donc pour $n \in \mathbb{Z}$ calculer f^n revient à mettre à la puissance n les coefficients de la diagonale.

Exercice 2 (ECT – ESCP)

1) I et J appartiennent à $\mathscr{E}$, $s(I) = 1$ et $s(J) = 3$.

(Contrairement à ce que j'ai fait, vous devez détailler, au moins le calcul pour la première matrice.)

2) $K \in \mathscr{E}$ équivaut aux 5 équations suivantes :

$$1 + a + b = \underbrace{-2 + 5 + 3 = a - 6 + 5}_{} = 1 - 2 + a = a + 5 - 6 = b + 3 + 5$$

Donc $6 = a - 1$ puis $a = 7$ et $1 + a + b = 6$ entraîne $b = -2$.
De plus, ces valeurs vérifient toutes les égalités.

$$\boxed{a = 7 \quad \text{et} \quad b = -2}$$

3) a) Soit M, $M' \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda M + M' \in \mathscr{E}$.

$$\begin{aligned}
\lambda a_1 + a'_1 + \lambda a_2 + a'_2 + \lambda a_3 + a'_3 &= \lambda(a_1 + a_2 + a_3) + a'_1 + a'_2 + a'_3 \\
&= \lambda(b_1 + b_2 + b_3) + b'_1 + b'_2 + b'_3 \\
&= \lambda b_1 + b'_1 + \lambda b_2 + b'_2 + \lambda b_3 + b'_3
\end{aligned}$$

Donc les deux premières lignes de $\lambda M + M'$ ont la même somme.
Les autres lignes et les colonnes se traitent de façon analogue. Donc $\lambda M + M' \in \mathscr{E}$.
De plus $0 \in \mathscr{E}$ donc $\mathscr{E} \neq \emptyset$.
En conclusion, $\boxed{\mathscr{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$

b) Soit M, $M' \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
s(\lambda M + M') &= \lambda a_1 + a'_1 + \lambda a_2 + a'_2 + \lambda a_3 + a'_3 && \text{(par exemple)} \\
&= \lambda(a_1 + a_2 + a_3) + a'_1 + a'_2 + a'_3 \\
&= \lambda s(M) + s(M')
\end{aligned}$$

De plus $s(M) \in \mathbb{R}$. Par conséquent $\boxed{s \text{ est une application linéaire de } \mathscr{E} \text{ dans } \mathbb{R}.}$

4) a) $\boxed{\subset}$: Soit $A \in \mathscr{E}$.

$$AJ = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 & b_1 + b_2 + b_3 & b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 & c_1 + c_2 + c_3 & c_1 + c_2 + c_3 \end{pmatrix} = s(A)J$$

$$JA = \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{pmatrix} = s(A)J$$

Donc $AJ = JA = s(A)J$. Ainsi,

$$\mathscr{E} \subset \{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AJ = JA\}$$

$\boxed{\supset}$: Réciproquement, soit $A \in \{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AJ = JA\}$: $AJ = JA$.
Alors, en regardant les premières colonnes de AJ et JA, il vient

$$a_1 + b_1 + c_1 = a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3$$

Les autres colonnes donnent, de même, les égalités voulues. Donc $A \in \mathscr{E}$:

$$\{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AJ = JA\} \subset \mathscr{E}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathscr{E} = \{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AJ = JA\}}$$

b) Lors des calculs de la question précédente, on a montré que $A \in \mathscr{E} \implies AJ = s(A)J$, donc

$$\mathscr{E} \subset \{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AJ = s(A)J\}$$

5) Méthode 1 : Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Alors $AB = (c_{ij})$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$.

Il faut montrer que les $\left(\sum_{\ell=1}^{3} c_{i\ell}\right)_i$ et $\left(\sum_{\ell=1}^{3} c_{\ell j}\right)_j$ sont tous égaux. Pour tout $i \in \{1, \ldots, 3\}$.

$$\sum_{\ell=1}^{3} c_{i\ell} = \sum_{\ell=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{k\ell} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\left(\sum_{\ell=1}^{3} b_{k\ell}\right) = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}(s(B)) = s(A)s(B)$$

Le calcul est identique sur les lignes. Ainsi, les sommes des colonnes et des lignes de AB sont égales et valent $s(A)s(B)$:

$$\boxed{AB \in \mathscr{E}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{s(AB) = s(A)s(B)}$$

(Comme vous le voyez, avec des notations du type (a_{ij}) – au lieu des a_1, b_1, etc... de l'énoncé – la rédaction peut être beaucoup plus efficace et concise. Le principe du « de même » reste le même.)

Méthode 2 : En utilisant 4a), $ABJ = A(BJ) = A(JB) = (AJ)B = JAB$ donc $AB \in \mathscr{E}$.
Et 4)b) : $ABJ = s(AB)J$ et $ABJ = A(BJ) = s(B)AJ = s(A)s(B)J$, donc $s(AB) = s(A)s(B)$. Plus élégant.

6) **a)**

$$\begin{aligned} A \in \mathscr{E} &\implies AJ = JA \\ &\implies J = A^{-1}JA \\ &\implies JA^{-1} = A^{-1}J \\ &\implies \boxed{A^{-1} \in \mathscr{E}} \end{aligned}$$

b) Par définition de A^{-1}, $AA^{-1} = I$.
De plus, d'après la question 5, $s(A)s(A^{-1}) = s(AA^{-1}) = s(I) = 1$. Par conséquent,

$$\boxed{s(A) \neq 0 \quad \text{et} \quad s(A^{-1}) = \frac{1}{s(A)}}$$

7) **a)** $\mathscr{F} = \operatorname{Ker}(s)$, et s est une application linéaire (question 3b), donc $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
De plus, d'après 5, pour tout $(A, B) \in \mathscr{F}^2$, $s(AB) = s(A)s(B) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{F} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ stable par produit}}$$

b) $J \in \mathscr{E}$ d'après 1), et $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel d'après 3a, donc $\boxed{B \in \mathscr{E}}$
Après calculs (ou d'après 4)b)...), $J^2 = s(J)J = 3J$. Donc, en utilisant 4)b),

$$\begin{aligned} BC &= B(A - B) \\ &= \frac{1}{3}s(A)J(A - \frac{1}{3}s(A)J) \\ &= \frac{1}{3}s(A)(JA - \frac{1}{3}s(A)J^2) \\ &= \frac{1}{3}s(A)(s(A)J - s(A)J) = 0 \end{aligned}$$

De plus, A et J commutent (4)a)) donc $\boxed{CB = BC = 0}$.

c) D'après 4), $AJ = s(A)J = JA$ donc, en multipliant par $\frac{1}{3}s(A)$, $AB = s(A)B = BA$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^nB = (s(A))^nB$ (par récurrence).
Comme $s(B) = s(A)$, $BJ = s(A) = JB$ puis de même $B^{n+1} = (s(A))^nB$.
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad (A - B)^n = A^n - B^n$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: est tautologique.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie ($n \geqslant 1$).

$$\begin{aligned} (A - B)^{n+1} &= (A^n - B^n)(A - B) = A^{n+1} - B^nA - A^nB + B^{n+1} \\ &= A^{n+1} - s(A)^{n-1}BA - s(A)^nB + s(A)^nB \\ &= A^{n+1} - s(A)^nB = A^{n+1} - B^{n+1} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad (A - B)^n = A^n - B^n}$

d) Comme $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel et que B et $A \in \mathscr{E}$, $C \in \mathscr{E}$.
De plus $s(B) = \frac{1}{3}s(A)s(J) = s(A)$, par conséquent $s(C) = s(A - B) = s(A) - s(B) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{C \in \mathscr{F}}$$

e) On vient de montrer que, pour tout $A \in \mathscr{E}$, $A = B + C$ avec $B \in \operatorname{Vect}(J) \subset \mathscr{E}$ et $C \in \mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ (d)). C'est-à-dire $\mathscr{E} = \operatorname{Vect}(J) + \mathscr{F}$
(La question à se poser est : a-t-on des informations sur la dimension ? A priori, non, donc il faut y aller à la main...)
Montrons que $\operatorname{Vect}(J) \cap \mathscr{F} = \{0\}$: Soit $A \in \operatorname{Vect}(J) \cap \mathscr{F}$.
Donc $A = \lambda J$ et $s(A) = s(\lambda J) = 3\lambda = 0$. Donc $\lambda = 0$, et $A = 0$.
Ainsi, $\operatorname{Vect}(J) \cap \mathscr{F} = \{0\}$.
En résumé, $\operatorname{Vect}(J) \cap \mathscr{F} = \{0\}$ et $\mathscr{E} = \operatorname{Vect}(J) + \mathscr{F}$ donc

$$\boxed{\mathscr{E} = \operatorname{Vect}(J) \oplus \mathscr{F}}$$

8) **a)** $F_S = \mathscr{F} \cap S_3(\mathbb{R})$ et $F_A = \mathscr{F} \cap A_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels comme intersection de sous-espaces vectoriels.

Si $A \in \mathscr{F}$, la somme de ses colonnes et de ses lignes est nulles, donc il en est de même pour ${}^tA$: ${}^tA \in \mathscr{F}$.

Notons $\sigma : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ l'application transposition restreinte à $\mathscr{F}$: $\sigma(A) = {}^tA$.

Alors σ est une symétrie de l'espace vectoriel $\mathscr{F}$, qui vérifie donc

$$\boxed{\mathscr{F} = \operatorname{Ker}(\sigma - \mathrm{id}_{\mathscr{F}}) \oplus \operatorname{Ker}(\sigma + \mathrm{id}_{\mathscr{F}}) = F_S \oplus F_A}$$

Car $\operatorname{Ker}(\sigma - \mathrm{id}_{\mathscr{F}}) = F_S$ et $\operatorname{Ker}(\sigma + \mathrm{id}_{\mathscr{F}}) = F_A$.

b)
- $\boxed{F_S}$ Soit $A = (a_{ij}) \in F_S$, avec $a_{ij} = a_{ji}$. De plus $s(A) = 0$ donc $a_{11} = -a_{12} - a_{13}$, $a_{22} = -a_{12} - a_{23}$ et $a_{33} = -a_{13} - a_{23}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -a_{12}-a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & -a_{12}-a_{23} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{13}-a_{23} \end{pmatrix} \\ &= a_{12}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Donc $\dim F_S = 3$ (au passage, on a trouvé une base de F_S)

- $\boxed{F_A}$ De même,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{12} \\ -a_{12} & 0 & a_{12} \\ a_{12} & -a_{12} & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Donc $\dim F_A = 1$.

- $\boxed{\operatorname{Vect} J}$ $\dim \operatorname{Vect}(J) = 1$.

Or $\mathscr{F} = F_S \oplus F_A$ d'après a) donc $\boxed{\dim \mathscr{F} = 3 + 1 = 4}$, puis $\mathscr{E} = \operatorname{Vect}(J) \oplus \mathscr{F}$ donc $\boxed{\dim \mathscr{E} = 1 + 4 = 5}$

Exercice 3 (PT 2015 A)

Partie 1

1) **a)** Matriciellement, $f(e_1)$ correspond au vecteur colonne $\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ de la matrice, donc dans la base canonique

$$\boxed{f(e_1) = (-7, 9, 7, -4)}$$

De même, matriciellement $f^2(e_1) = f(f(e_1))$ s'écrit $A\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -90 \\ -70 \\ 40 \end{pmatrix}$, et il vient

$$\boxed{f^2(e_1) = (-30, -90, -70, 40)}$$

b) Comme $\begin{pmatrix} -30 \\ -90 \\ -70 \\ 40 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$100e_1 + 10f(e_1) + f^2(e_1) = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (e_1, f(e_1), f^2(e_1)) \text{ est liée}}$

2) De même $f(e_2)$ a pour vecteur colonne $\begin{pmatrix} -16 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$, et $f^2(e_2)$, $\begin{pmatrix} 160 \\ -70 \\ 40 \\ 70 \end{pmatrix}$, donc

$$100e_2 + 10f(e_2) + f^2(e_2) = 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{La famille } (e_2, f(e_2), f^2(e_2)) \text{ est liée}}$

On peut résoudre le système $\sum_{i=0}^{2} \lambda_i f^i(e_2) = 0$ et on trouve des λ_i qui conviennent, ou en lisant les dernières questions conjecturer que $100, 10$ et 1 vont convenir.

3) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 e_2 + \lambda_4 f(e_2) = 0 \implies & \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -16 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = 0 \\
\implies & \left\{ \begin{array}{llll} \lambda_1 & -7\lambda_2 & & -16\lambda_4 = 0 \\ & 7\lambda_2 & & -4\lambda_4 = 0 \\ & 9\lambda_2 & +\lambda_3 & -3\lambda_4 = 0 \\ & -4\lambda_2 & & -7\lambda_4 = 0 \end{array} \right. \\
\implies & \left\{ \begin{array}{llll} \lambda_1 & -7\lambda_2 & & -16\lambda_4 = 0 \\ & 7\lambda_2 & & -4\lambda_4 = 0 \\ & & +\lambda_3 & (-3 + \frac{9}{7} \times 4)\lambda_4 = 0 \\ & & & \underbrace{(-7 - \frac{4}{7})}_{\neq 0} \lambda_4 = 0 \end{array} \right. \\
\implies & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est libre.
De plus $\operatorname{Card}((e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ donc

$$\boxed{(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$$

4) Montrons que la relation $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$ est vérifiée pour les vecteurs de la base précédente : D'après un calcul effectué au 1),

$$f^2(e_1) + 10f(e_1) + 100e_1 = 0$$

Donc, en appliquant f, linéaire, il vient

$$f(f^2(e_1) + 10f(e_1) + 100e_1) = f^2(f(e_1)) + 10f(f(e_1)) + 100f(e_1) = f(0) = 0$$

Donc la relation est vérifiée par e_1 et $f(e_1)$.
D'après le calcul effectué au 2), il en est de même pour e_2 et $f(e_2)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^4$, comme $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ on peut écrire

$$x = x_1 e_1 + x_2 f(e_1) + x_3 e_2 + x_4 f(e_2)$$

D'où, par linéarité de f et f^2, $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^4,\ f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0}$

5)

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & 0 \times e_1 + 1 \times f(e_1) + 0 \times e_2 + 0 \times f(e_2) \\ f^2(e_1) & = & -100e_1 - 10f(e_1) \\ f(e_2) & = & f(e_2) \\ f^2(e_2) & = & -100e_2 - 10f(e_2) \end{array}\right.$$

Donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -100 & 0 & 0 \\ 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}}$$

Partie 2

1) Soit $y \in E_x = \operatorname{Vect}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$.
Le vecteur y est une combinaison linéaire (la somme est donc finie) de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$y = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x_n \qquad \text{avec} \qquad (\alpha_n) \in \mathbb{R}^{N+1}$$

Ainsi, $f(y) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n f(x_n) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x_{n+1} \in E_x$

Conclusion : $\boxed{y \in E_x \text{ entraîne } f(y) \in E_x}$

2) Montrons que $f(E_x) \subset E_x$:

$$\begin{aligned} z \in f(E_x) &\Longrightarrow \exists y \in E_x /\ z = f(y) \qquad\qquad \text{Or } f(y) \in E_x \text{ d'après 1} \\ &\Longrightarrow z \in E_x \end{aligned}$$

Ainsi, $f(E_x) \subset E_x$, c'est-à-dire

$$\boxed{E_x \text{ est stable par } f}$$

3) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f.
Par récurrence, F est stable par f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc $x \in F$ entraîne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f^n(x) \in F$.
Comme F est un sous-espace vectoriel, F est stable par combinaison linéaire, donc

$$E_x = \operatorname{Vect}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \subset F$$

Conclusion : $\boxed{E_x \subset F}$

4) **a)** Comme $(x_n)_{0 \leqslant n \leqslant d}$ est une famille de $d+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^d$, de dimension d, elle est nécessairement liée.
De plus $x_0 = x \neq 0$, donc (x_0) est libre.
Donc l'ensemble $A = \{p \in \mathbb{N} | (x_0, \dots, x_{p-1}) \text{est libre}\}$ est non vide et majoré (par d), il admet un plus grand élément p.

b) Par définition de p, $(x_0, \dots, x_p)$ est liée : soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad (\alpha_0, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$$

Montrons par l'absurde que $\alpha_p \neq 0$: Supposons $\alpha_p = 0$. L'égalité ci-dessus s'écrit

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i x_i = 0$$

Or $(x_0, \dots, x_{p-1})$ libre, donc $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) = 0$: ainsi tous les α_i sont nuls, ce qui est absurde.

Donc $\alpha_p \neq 0$. En posant $a_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_p}$, l'égalité $\displaystyle\sum_{i=0}^{p} \alpha_i x_i = 0$ s'écrit

$$\boxed{x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i}$$

c) Soit $y \in E'_x = \mathrm{Vect}\left(\{x_0, \dots, x_{p-1}\}\right)$.

$$y = \sum_{n=0}^{p-1} \alpha_n x_n \qquad \text{avec} \qquad (\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{n=0}^{p-1} \alpha_n f(x_n) \\ &= \alpha_0 x_1 + \cdots + \alpha_{p-2} x_{p-1} + \alpha_{p-1} x_p \\ &= \alpha_0 x_1 + \cdots + \alpha_{p-2} x_{p-1} + \alpha_{p-1} \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i \in E'_x \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E'_x \text{ est stable par } f}$

d)
- $\boxed{\subset}$ D'après c), E'_x est stable par f. De plus, $x \in E'_x$ par construction. Donc d'après 2)

$$E_x \subset E'_x$$

On pouvait faire cette inclusion directement, mais on vous demande de déduire le résultat de la question précédente. D'ailleurs toujours traquer les questions **en déduire** *: souvent ce sont des questions relativement facile, qui teste votre capacité à lire l'énoncé.*

- $\boxed{\supset}$ Comme $\{x_0, \dots, x_{p-1}\} \subset \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, en passant aux espaces vectoriels engendrés :

$$E'_x \subset E_x$$

Conclusion : $\boxed{E_x = E'_x}$

Par construction de p, $\mathscr{B}_p$ est libre. Par construction de E'_x, $\mathscr{B}_p$ est génératrice de E'_x, c'est donc une base de E'_x.

Comme $E'_x = E_x$, $\boxed{\mathscr{B}_p = (x_0, \dots, x_{p-1}) \text{ est une base de } E_x}$

Là aussi, c'était faisable : juste glaner les informations.

5) Pour tout $i < p - 1$, $f(x_i) = x_{i+1}$.

Pour $i = p - 1$, $f(x_{p-1}) = x_p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i$ d'après 3)b).

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

6) Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \widehat{f}^i = 0$$

Par définition de $\widehat{f}$ et de x_i, $\widehat{f}^i(x) = x_i$ pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$. Donc en évaluant en x l'égalité précédente :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \widehat{f}^i(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i x_i = 0$$

Or $\mathscr{B}_p = (x_0, \dots, x_{p-1})$ est libre par construction, donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) = (0, \dots, 0)$.

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (\mathrm{id}_{E_x}, \widehat{f}, \widehat{f}^2, \dots, \widehat{f}^{p-1}) \text{ est une famille libre de } \mathscr{L}(E_x)}$

La première égalité porte sur des fonctions. Quand vous avez des fonctions, vous pouvez toujours les évaluer en une valeur bien choisie. Ici il n'y a qu'un élément de $\mathbb{R}^d$ qui a quelque chose de particulier : c'est x, choisi et fixé depuis le début.

7) a) Soit $k < p$. D'après 3)b),

$$x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i$$

En appliquant $\widehat{f}^k$, linéaire, il vient $\widehat{f}^k(x_p) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \widehat{f}^k(x_i)$

Comme $x_i = f^i(x) = \widehat{f}^i(x)$, l'égalité s'écrit $\widehat{f}^{k+p}(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \widehat{f}^{k+i}(x)$ puis

$$\boxed{\widehat{f}^p(x_k) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \widehat{f}^i(x_k) = a_0 x_k + a_1 \widehat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1} \widehat{f}^{p-1}(x_k)}$$

b) D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$,

$$\widehat{f}^p(x_k) - a_{p-1}\widehat{f}^{p-1}(x_k) - \cdots - a_1 \widehat{f}(x_k) - a_0 \,\mathrm{id}_{E_x}(x_k) = 0$$

Or $\mathscr{B}_p = (x_0, \dots, x_{p-1})$ est une base de E_x. L'endomorphisme $g = \widehat{f}^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i \widehat{f}^i$ de E_x étant nul sur une base de E_x, il est identiquement nul :

$$\boxed{\widehat{f}^p - a_{p-1}\widehat{f}^{p-1} - \cdots - a_1 \widehat{f} - a_0 \,\mathrm{id}_{E_x} = 0}$$

Exercice 4

1) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que

$$\forall x \in E \qquad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i(x) = 0$$

Soit $j \in [\![1, k]\!]$ et $x_j \in F_j - \{0\}$ (x_j existe car F_j non nul).
Par définition des projections $(p_i)_i$, pour tout $i \neq j$, $p_i(x_j) = 0$ et $p_j(x_j) = x_j$ donc

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i(x_j) = \alpha_j p_j(x_j) = \alpha_j x_j = 0$$

Comme $x_j \neq$, il vient $\alpha_j = 0$.
Donc $\forall j \in [\![1,k]\!]$, $\alpha_j = 0$.
Conclusion : $\boxed{(p_1,\dots,p_k) \text{ est libre}}$

2) La famille $(p_1,\dots,p_k)$ est libre, et génératrice du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(p_1,\dots,p_k)$, donc c'est une base de ce sous-espace.
Or cette famille contient k éléments.
Conclusion : $\boxed{\mathrm{Vect}\,(p_1,\dots,p_k) \text{ est de dimension } k}$

3) **a)** $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\forall i \in [\![1,k]\!], \quad p_i \circ f = f \circ p_i$.
Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Montrons que $f(F_i) \subset F_i$. *(On écrit le début, la fin, et on essaye de faire apparaître $p_i \circ f$ ou $f \circ p_i$. Avec persévérance : si $p_i \circ f$ ne veut pas apparaître, on essaye avec $f \circ p_i$)*

$$\begin{aligned} x \in f(F_i) &\Longrightarrow \exists y \in F_i, \quad f(y) = x \\ &\Longrightarrow \exists y \in F_i, \quad f(p_i(y)) = x \qquad (\text{car } y \in F_i \text{ donc } p_i(y) = y) \\ &\Longrightarrow p_i(f(y)) = x \qquad (\text{car } fp_i = p_if) \\ &\Longrightarrow p_i(x) = x \\ &\Longrightarrow x \in F_i \end{aligned}$$

Donc $\forall i \in [\![1,k]\!], f(F_i) \subset F_i$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\forall i \in [\![1,k]\!], f(F_i) \subset F_i$.
Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Montrons que $p_i \circ f = f \circ p_i$.
Soit $x \in E$. Comme $E = \bigoplus_{j=1}^{k} F_j$, on peut écrire $x = \sum_{j=1}^{k} x_j$ avec $x_j \in F_j$. Par linéarité de f,

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) = \sum_{j=1}^{k} f(x_j)$$

Comme $f(F_j) \subset F_j$, $f(x_j) \in F_j$. Donc

$$p_i(f(x)) = p_i(f(x_i)) = f(x_i)$$

De plus, $p_i(x) = x_i$ donc $f(p_i(x)) = f(x_i)$. Ainsi, $p_i(f(x)) = f(p_i(x))$.
Par conséquent $p_i \circ f = f \circ p_i$.
Finalement : $\forall i \in [\![1,k]\!], \quad p_i \circ f = f \circ p_i$.

Conclusion :

$$\boxed{(\forall i \in [\![1,k]\!], \quad p_i \circ f = f \circ p_i) \Longleftrightarrow (\forall i \in [\![1,k]\!], f(F_i) \subset F_i)}$$

b) Soit $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_{n_1},e_{n_1+1},\dots,e_{n_2},\dots,e_{n_k})$ une base de E adaptée à la décomposition de E suivant les F_i.
D'après **3)a)**, f laisse stable tous les F_i, donc

$$\forall i \in [\![1,k]\!], \quad \forall p \in [\![n_{i-1}+1, n_i]\!], \qquad f(e_p) = \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} a_{p,j} e_j$$

(Avec $n_0 = 0$)
En notant $A_i = (a_{p,j})_{n_{i-1}+1 \leqslant p,j \leqslant n_i}$, la matrice de f dans cette base est donc diagonale blocs :

$$\boxed{\mathrm{Mat}\,(f,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}}$$

4) **a)** Soit $u, v \in \Delta$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\forall g \in \text{Vect}\,(p_1, \dots p_k), \qquad (\lambda u+v)\circ g = \lambda ug+vg = \lambda gu+gv = g\circ(\lambda u+v) \qquad$ (Par linéarité de g)

Donc $\lambda u + v \in \Delta$. De plus $O \circ g = 0 = g \circ 0$, donc $\Delta \neq \emptyset$.
Conclusion : $\boxed{\Delta \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E) \text{ donc un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$

b) Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$.

Si $f \in \Delta$, alors f commute avec chacun des p_i.
Ainsi, d'après **3)b)**, tout $f \in \Delta$ a une matrice diagonale blocs dans la base $\mathscr{B}$, avec k blocs de taille n_i^2. Posons $\varphi(f) = (A_1, \dots, A_k)$ la liste de ces blocs.
Montrons que $\varphi : \Delta \to \mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.
L'application φ est un morphisme par construction de la matrice d'une application linéaire dans une base.
Injectivité : Soit $f \in \Delta$ tel que $\varphi(f) = 0$. Donc f a pour matrice la matrice nulle, donc $f = 0$. Ainsi, φ est injective.
Surjectivité : Toute matrice diagonale blocs de ce type définit dans la base $\mathscr{B}$ un endomorphisme f qui laisse stable chacun des F_i, donc qui commute avec les p_i, puis par linéarité avec tout $g \in \Delta$. Donc tout élément de $\mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{R})$ a un antécédent par φ.
Finalement, φ est un isomorphisme.
Conclusion : $\boxed{\dim \Delta = \dim(\mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathscr{M}_{n_k}(\mathbb{R})) = n_1^2 + \cdots + n_k^2}$

FIN DE L'ÉPREUVE