

Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Dans tout le problème, λ est un réel strictement positif.

Pour tout réel α et tout réel $\lambda > 0$, on définit l'application $f_{\alpha,\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $t \mapsto t^\alpha e^{-\lambda t}$.

1) a) Pour $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, étudier $\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} f_{\alpha,\lambda}(t)$.

b) Déterminer pour quelles valeurs de $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t) dt$ converge.

2) Montrer que pour tout x réel, les fonctions

$$t \mapsto \frac{e^{-t} \cos(tx)}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{e^{-t} \sin(tx)}{\sqrt{t}}$$

sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

3) On définit alors, sur $\mathbb{R}$, les deux fonctions U et V par :

$$U(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \cos(tx)}{\sqrt{t}} dt \quad \text{et} \quad V(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{\sqrt{t}} dt$$

a) Étudier la parité des deux fonctions U et V .

b) À l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera soigneusement, calculer $U(0)$.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4) Pour tout réel x , on pose $W(x) = U(x) + iV(x)$ où i vérifie $i^2 = -1$.

a) Montrer que la fonction W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que la fonction W est solution d'une équation différentielle (E) linéaire du premier ordre que l'on explicitera et que l'on ne cherchera pas à résoudre ici. (On pourra utiliser une intégration par parties)

c) En déduire que U et V sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

d) Prouver que l'on a pour tout réel x :

$$\begin{cases} U'(x) = -\frac{V(x) + xU(x)}{2(1+x^2)} \\ V'(x) = \frac{U(x) - xV(x)}{2(1+x^2)} \end{cases}$$

- 5) Pour tout réel t , on note $g(t) = f_{-1/2,\lambda}(t) \sin(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\lambda t} \sin(t)$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 6) On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t) dt$.
- Prouver que pour tout entier naturel n , $a_n = \int_0^\pi \frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} \sin(t) dt$.
 - Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
 - Prouver enfin que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.
- 7) a) Justifier que la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$ converge. On note S sa somme.
- Montrer que $S > 0$.
 - En utilisant la somme partielle d'ordre N de la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$, montrer que l'on a

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

- 8) À l'aide d'un changement de variable, démontrer que pour tout $x > 0$, $V(x) > 0$.
- 9) Pour tout réel $x > 0$, on note $R(x) = [U^2(x) + V^2(x)]^{1/2}$ et $T(x) = \text{Arctan} \left(\frac{U(x)}{V(x)} \right)$.
On rappelle que $V(x) > 0$ lorsque $x > 0$, ce qui montre que T est bien définie.
- Prouver que les fonctions R et T sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.
 - Montrer que les fonctions R et T sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - Démontrer que R et T sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de deux équations différentielles linéaires du premier ordre.
 - Résoudre ces équations différentielles sur $\mathbb{R}$.
 - En déduire une expression sur $\mathbb{R}_+$ de R et de T à l'aide de fonctions usuelles.
- 10) Donner des expressions de $U(x)$ et de $V(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- 11) Retrouver les résultats obtenus à la question précédente en résolvant l'équation différentielle (E) obtenue à la question 4b.
- 12) Pour tout entier naturel n et tout réel x , on pose

$$U_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos^n(xt) dt \quad \text{et} \quad V_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin^n(xt) dt$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $U_2(x)$ et $V_2(x)$ à l'aide de $U(x)$ et $V(x)$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x)$.

FIN DE L'ÉPREUVE