Épreuve de Mathématiques 5

Correction

4

Exercice 1 (CCINP PC 2013)

Partie 1 (ÉTUDE DANS UN CAS PARTICULIER)

I.1.

I.1.a. Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \det(xI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix} \\
&\quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \\
&= (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{matrix} \\
&= (x+2)(x-1)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont

- $\lambda = -2$, de multiplicité $\alpha = 1$;
- $\lambda = 1$, de multiplicité $\alpha = 2$.

On vérifie évidemment avec la trace : $\mathrm{Tr}\,(A) = 2 - 2 = 0$.

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(A) = \{-2, 1\}}$$

I.1.b. Par produit matriciel, il vient

$$Au_1 = C_1 - C_3 = u_1 \qquad Au_2 = u_2 \quad \text{et} \quad Au_3 = C_1 + C_2 + C_3 = -2u_3$$

Par conséquent $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs propres. De plus,

$$\begin{aligned}
\det \mathscr{F} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \\ \end{matrix} \\
&= (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 2 + 1 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Donc la famille est une base. Conclusion :

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ constituée de vecteurs propres de } A}$$

Pour les gens alergiques aux calculs, on peut aussi raisonner : u_1 et u_2 ne sont pas colinéaire donc (u_1, u_2) libre, or $\dim E_{-2} \leqslant 2$ et $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2) \subset E_{-2}$. Donc $E_{-2} = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$. De plus les sous-espaces propres-sont en somme directe. Etc.

On vous fournit les vecteurs. Il est inutile de faire semblant de ne pas les avoir vu, même si vous êtes fier de votre capacité à trouver sans indication.

I.1.c. La famille $\mathscr{F}$ est une base de vecteurs propres. Donc, dans la base $\mathscr{F}$, la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé sera diagonale :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$$

Pour les 5/2 : la matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable.

I.1.d. Calculons les images des vecteurs de $\mathscr{F}$ par B :

- $Bu_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda u_1$ car $4 \neq 0$ (3e coordonnée).
- $Bu_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \lambda u_2$ car $-2 \neq 0$ (1ère coordonnée).
- $Bu_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ * \end{pmatrix} \neq \lambda u_3$ car $-1 \neq 2$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Aucun des éléments de } \mathcal{F} \text{ n'est un vecteur propre commun à } A \text{ et } B}$$

I.2.

I.2.a. Calculons le polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}
\chi_B(x) &= \det(xI_3 - B) \\
&= \begin{vmatrix} x-3 & 3 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -1 & 3 & x-1 \end{vmatrix} \leftarrow \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -(x-2) & x-2 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)^2\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)^3
\end{aligned}$$

Ainsi, B a pour unique valeur propre $\lambda = 2$, de multiplicité $\alpha = 3$.

On vérifie évidemment avec la trace : $\mathrm{Tr}\,(A) = 3 + 2 + 1 = 6$.

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(B) = \{2\}}$$

I.2.b. L'image de M est engendré par ses vecteurs colonnes.

Comme $2I_3 - B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Im}\,_2(B)$ est engendré par $-u_4$, $3u_4$ et u_4 :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,_2(B) = \mathrm{Vect}\,(u_4)}$$

Ainsi, $\dim \mathrm{Im}\,_2(B) = 1$. D'après le théorème du rang,

$$\boxed{\dim(E_2(B)) = 2}$$

I.2.c. Comme $\dim E_2(B) = 2 < 3 = \alpha$, en notant $\alpha = 3$ la multiplicité de la valeur propre 2 dans le polynome caractéristique,

$$\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

Dès le spectre, on savait que B n'était pas diagonalisable : si elle l'était, $B = P(2I_3)P^{-1} = 2PP^{-1} = 2I_3$, or $B \neq 2I_3$ ($b_{11} = 3 \neq 2$).

I.3.

I.3.a. *Pour une intersection, il est souvent plus simple de partir de l'expression sous forme de noyau (donc on fusionne 2 systèmes) que de partir de l'expression sous forme de* Vect *(où il faut prouver que des vecteurs ne sont pas liés).*

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \cap E_2(B) &\iff \begin{cases} (I_3 - A)X = 0 \\ (2I_3 - B)X = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} y & y & -2y \end{pmatrix} = y u_5
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}\,(u_5)}$$

I.3.b. Les vecteurs propres communs à A et B sont les vecteurs de

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A), \mu \in \mathrm{Sp}\,(B)} E_\lambda(A) \cap E_\mu(B) \right) \setminus \{0\}$$

Comme $\mathrm{Sp}\,(A) = \{-2, 1\}$ et $\mathrm{Sp}\,(B) = \{2\}$, on étudie

$$E_1(A) \cap E_2(B) \qquad \text{et} \qquad E_{-2}(A) \cap E_2(B)$$

De plus, $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\,(u_3)$ d'après I.1.b. Donc

$$\begin{aligned}
X \in E_{-2}(A) \cap E_2(B) &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ X = \lambda u_3 \quad \text{et} \quad \lambda(2I_3 - B)u_5 = 0 \\
&\iff X = 0 \qquad \text{Car } (2I_3 - B)u_3 = 3 \neq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_{-2}(A) \cap E_2(B) = \{0\}$. Donc, d'après I.3.a

$$\boxed{\text{Les vecteurs propres communs à } A \text{ et } B \text{ sont les } \lambda u_5 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}^*}$$

I.4.

I.4.a. Calculons :

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{[A, B] = C}$$

I.4.b. Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_C(x) &= \det(xI_3 - C)\\
&= \begin{vmatrix} 5+x & -3 & 1 \\ 2 & x-6 & -2 \\ 5 & -3 & x+1 \end{vmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3\\
&= \begin{vmatrix} x & 0 & -x \\ 2 & x-6 & -2 \\ 5 & -3 & x+1 \end{vmatrix}\\
&= x\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & x-6 & -2 \\ 5 & -3 & x+1 \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\
&= x\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x-6 & 0 \\ 5 & -3 & x+1 \end{vmatrix} \leftarrow\\
&= x(x-6)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & x+1 \end{vmatrix} \qquad = x(x-6)(x+6)
\end{aligned}$$

Donc le polynome caractéristique est scindé à racines simples :

$$\boxed{C \text{ est diagonalisable}}$$

Comme 0 est de multiplicité 1, $\dim E_0 = 1$. Or $E_0 = \operatorname{Ker} C$, donc d'après le théorème du rang

$$\boxed{\operatorname{rg} C = 2}$$

Partie 2 (CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE)

II.1.

II.1.a. Notons λ_A la valeur propre de A associé à e, et de même λ_B celle de B.

$$\begin{aligned}
[A, B]e &= ABe - BAe\\
&= \lambda_B Ae - \lambda_A Be\\
&= (\lambda_B\lambda_A - \lambda_A\lambda_B)e\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{e \in \operatorname{Ker}([A, B])}$$

II.1.b. Comme e est un vecteur propre, $e \neq 0$ donc $\dim \operatorname{Ker}[A, B] > 0$. D'après le théorème du rang,

$$\boxed{\operatorname{rg}([A, B]) < n}$$

II.2. $[A, B] = 0$ entraîne $\operatorname{Ker}[A, B] = \operatorname{Ker} 0 = \mathbb{C}^n$.
Or $E_\lambda(A)$ est par définition un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$:

$$\boxed{\text{Si } [A, B] = 0_n, \text{ alors } A \text{ et } B \text{ vérifient la propriété } \mathcal{H}.}$$

II.3.

II.3.a. Par construction, ψ est une restriction de l'endomorphisme canoniquement associé à B, donc linéaire :

$$\forall \mu \in \mathbb{C},\ \forall (X, Y) \in E_\lambda(A)^2, \qquad \psi(\mu X + Y) = B(\mu X + Y) = \mu BX + BY$$

Montrons que $\psi(E_\lambda(A)) \subset E_\lambda(A)$:

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) \Longrightarrow\ A\psi(X) &= ABX \\ &= BAX \qquad \text{Car } E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}\,[A,B] \\ &= B(\lambda X) \qquad \text{Car } X \in E_\lambda(A) \\ &= \lambda\psi(X) \\ \Longrightarrow \psi(X) \in E_\lambda(A) \end{aligned}$$

Donc $\psi(E_\lambda(A)) \subset E_\lambda(A)$. Conclusion :

$$\boxed{\psi \in \mathscr{L}(E_\lambda(A))}$$

II.3.b. Comme λ est une valeur propre de A, $\dim E_\lambda(A) > 0$.
Or tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension non nulle admet au moins une valeur propre *(le polynôme caractéristique est scindé)* : il existe $X \in E_\lambda(A)$ et $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$\psi(X) = \mu X$$

Donc X est un vecteur propre de A (puisque dans $E_\lambda(A)$ et de B (puisque $BX = \mu X$).
Conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur propre commun à } A \text{ et } B}$$

II.4. $\dim E = 1$, donc les matrices de φ et ψ sont des matrices 1×1, donc diagonales : tout vecteur non nul est vecteur propre. Ainsi,

$$\boxed{\text{La propriété } \mathcal{P}_1 \text{ est vraie}}$$

II.5.

II.5.a. Comme A et B ne vérifie par la propriété $\mathcal{H}$, alors

$$\forall \mu \in \mathrm{Sp}\,(A) \qquad E_\mu \not\subset \mathrm{Ker}\,[A,B]$$

En particulier pour $\mu = \lambda$. Donc il existe $u \in \mathbb{E}_\lambda(A)$, avec $u \notin \mathrm{Ker}\ C$:

$$\boxed{\exists u \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad Au = \lambda u \quad \text{et} \quad Cu \neq 0}$$

Toujours la même méthode : traduire ce qu'on sait (les hypothèses), traduire ce qu'on veut... et la preuve est faite.

II.5.b. Par définition de $\mathrm{Im}\ C$, $\mathrm{Vect}\,(v) \subset \mathrm{Im}\ C$. Or $\dim \mathrm{Im}\ C = \mathrm{rg}\ C = 1$ et $\dim \overrightarrow{v} = 1$ car $v \neq 0$.
Donc, par égalité des dimensions,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(C) = \mathrm{Vect}\,(v)}$$

II.5.c. Montrons que $v \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$:

$$\begin{aligned} v &= Cu \\ &= ABu - BAu \\ &= ABu - \lambda Bu \qquad \text{Par construction de } u \\ &= (A - \lambda I_n)Bu \in \mathrm{Im}_\lambda(A) \end{aligned}$$

Donc Vect $v \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$:

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(C) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)}$$

II.5.d. L'inclusion précédente nous donne

$$1 = \operatorname{rg}(C) = \dim \operatorname{Im} C \leqslant \dim \operatorname{Im}_\lambda(A)$$

De plus le théorème du rang s'écrit $\dim \operatorname{Im}_\lambda(A) = n - \dim E_\lambda(A)$. Or, par définition des valeurs propres, $\dim E_\lambda(A) \geqslant 1$. Donc

$$\boxed{1 \leqslant \dim(\operatorname{Im}_\lambda(A)) \leqslant n-1}$$

II.5.e. Montrons que $[A, \lambda I_n - A] = 0_n$: A et $\lambda I_n - A$ commutent donc $\boxed{[A, \lambda I_n - A] = 0}$

Montrons que $[B, \lambda I_n - A] = C$:

$$B(\lambda I_n - A) - (\lambda I_n - A)B = \lambda B - BA - \lambda B + AB = C$$

Donc $\boxed{[B, \lambda I_n - A] = C}$

Montrons que φ et ψ sont dans $\mathscr{L}(\operatorname{Im}_\lambda(A))$:

Ce sont des restrictions des endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement, donc elles sont linéaires. Montrons qu'elles laissent stable $\operatorname{Im}_\lambda(A)$:

- φ : Soit $X \in E$.

$$\begin{aligned}\varphi((\lambda I_n - A)X) &= A(\lambda I_n - A)X \\ &= (\lambda I_n - A)AX && \text{D'après ci-dessus : } [A, \lambda I_n - A] = 0 \\ &\in \operatorname{Im}_\lambda(A)\end{aligned}$$

  Donc $\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\operatorname{Im}_\lambda(A))}$

- ψ : Soit $X \in E$.

$$\begin{aligned}\psi((\lambda I_n - A)X) &= B(\lambda I_n - A)X \\ &= (\lambda I_n - A)BX + CX && \text{D'après ci-dessus : } [B, \lambda I_n - A] = C \\ &\in \operatorname{Im}_\lambda(A) && \text{D'après II.5.c : } \operatorname{Im} C \subset \operatorname{Im}_\lambda(A)\end{aligned}$$

  Donc $\boxed{\psi \in \mathscr{L}(\operatorname{Im}_\lambda(A))}$

II.5.f. $\operatorname{Im}[\varphi, \psi] = [AB - BA](\operatorname{Im}_\lambda(A)) \subset \operatorname{Im}[A, B]$ donc

$$\operatorname{rg}[\varphi, \psi] \leqslant \operatorname{rg} C = 1$$

Comme $k = \dim \operatorname{Im}_\lambda(A) \in [\![1, n-1]\!]$ d'après II.5.d, $\mathcal{P}_k$ est vérifiée par hypothèse : pour tout couple $(\varphi, \psi) \in \mathscr{L}(\operatorname{Im}_\lambda(A))^2$ tels que $\operatorname{rg}[\varphi, \psi] \leqslant 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ. Les hypothèses de $\mathcal{P}_k$ étant vérifiées,

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur propre commun à } \varphi \text{ et } \psi}$$

Notons X ce vecteur propre (donc $\neq 0$) commun. Il vérifie

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \qquad \varphi(X) = AX = \lambda_1 X \quad \text{et} \quad \psi(X) = BX = \lambda_2 X$$

Donc

$$\boxed{\text{C'est un vecteur propre commun à } A \text{ et } B}$$

II.6. On effectue une récurrence forte :

- $\mathcal{P}_1$: est vraie d'après II.4.
- $(\forall k \in [\![1, n-1]\!]\ \mathcal{P}_k) \Longrightarrow \mathcal{P}_n$: Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Si A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$:

Si $\operatorname{rg}(C)=1$, alors il existe un vecteur propre commun, construit au II.5.

Si $\operatorname{rg}(C)=0$, alors $[A,B]=0$ et d'après II.2 A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$, ce qui est absurde.

Donc nous avons prouvé $\mathcal{P}_n$ dans ce cas.

Si A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$: D'après II.3.b, il existe un vecteur propre commun à A et B – quel que soit le rang de C. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie dans ce cas.

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n \text{ est vraie}}$$

Partie 3 (ÉTUDE D'UN AUTRE CAS PARTICULIER)

III.1. Effectuons un changement d'indice $i=2n-k$:

$$\begin{aligned} g(P) &= X^{2n}\sum_{k=0}^{2n} a_k\left(\frac{1}{X}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k}X^k \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{g(P)=\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k}X^k}$$

III.2.

- Étude de f : f est linéaire par linéarité de la dérivation.
Pour tout $P\in E$, $f(P)=P'\in\mathbb{C}[X]$, et $\deg(f(P))\leqslant \deg P-1\leqslant 2n$ donc $f(P)\in E$:

$$\boxed{f\in\mathscr{L}(E)}$$

- Étude de g : Linéarité : Soient $(P,Q)\in E^2$, $\lambda\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} g(\lambda P+Q) &= X^{2n}(\lambda P+Q)\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= \lambda X^{2n}P\left(\frac{1}{X}\right)+X^{2n}Q\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= \lambda g(P)+g(Q) \end{aligned}$$

Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_kX^{2k}\in\mathbb{C}_{2n}[X]$. D'après III.1,

$$g(P)=\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k}X^k\in\mathbb{C}_{2n}[X]$$

Attention : $\deg(g(P))=2n-\operatorname{val}(P)$ où $\operatorname{val}(P)$ est le plus petit indice tel que $a_k\neq 0$ (la valuation en 0). Donc ce n'est pas lié au degré de P. Et la façon la plus simple de le prouver est de prendre des coefficients et d'effectuer le calcul.

Donc

$$\boxed{g\in\mathscr{L}(E)}$$

III.3.

III.3.a. Soit $P \in E$.
$$g(g(P)) = g\left(X^{2n}P\left(\frac{1}{X}\right)\right) = X^{2n}\frac{1}{X^{2n}}P(X) = P$$
Donc g est bijectif (c'est même une symétrie) et 0 n'est pas valeur propre.
Soit $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ un vecteur propre de g pour la valeur propre $\lambda \neq 0$: $P \neq 0$. Il existe donc un $i \in \int 02n$ tel que $a_i \neq 0$.
Si $i \geqslant n$, $\deg P \geqslant n$. Sinon $i < n$ et
$$\begin{aligned} g(P) &= \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k}X^k && \text{D'après III.1} \\ &= \lambda P && P \text{ vecteur propre pour } \lambda \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \lambda a_k X^k \end{aligned}$$
Au degré i, on obtient donc $a_{2n-i} = \lambda a_i \neq 0$ et $2n - i > n$ donc $\deg P \geqslant n$. Conclusion :
$$\boxed{\text{Si } P \text{ est un vecteur propre de } g\text{, alors } \deg(P) \geqslant n.}$$

III.3.b. $g(X^n) = X^{2n}\left(\frac{1}{X}\right)^n = X^n$
$$\boxed{X^n \text{ est un vecteur propre de } g}$$

III.4.

III.4.a. Par double inclusion :

$\boxed{\subset}$
$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(f^i) &\Longrightarrow P^{(i)} = 0 \\ &\Longrightarrow \deg P \leqslant i-1 \\ &\Longrightarrow P \in \mathbb{C}_{i-1}[X] \end{aligned}$$
Donc $\operatorname{Ker}(f^i) \subset \mathbb{C}_{i-1}[X]$.

$\boxed{\supset}$
$$\begin{aligned} P \in \mathbb{C}_{i-1}[X] &\Longrightarrow \deg P \leqslant i-1 \\ &\Longrightarrow P^{(i)} = 0 \\ &\Longrightarrow P \in \operatorname{Ker}(f^i) \end{aligned}$$
Donc $\mathbb{C}_{i-1}[X] \subset \operatorname{Ker}(f^i)$.
Conclusion
$$\boxed{\operatorname{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]}$$

III.4.b. Comme $i \neq 0$, $E_0(f^i) = \operatorname{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X] \neq \{0\}$. Donc
$$\{0\} \subset \operatorname{Sp}(f^i)$$
Réciproquement : soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(f^i)$, $\lambda \neq 0$, et $P \in E$ un vecteur propre associé.
En particulier, $P \neq 0$. Pour $k > 2n$, $f^k(P) = 0$ donc, par exemple, $(f^i)^{2n+1}(P) = 0$.
Or, par récurrence, $(f^i)^{2n+1}(P) = \lambda^{2n+1}P \neq 0$. Ce qui est absurde. Donc
$$\operatorname{Sp}(f^i) \subset \{0\}$$
Conclusion :
$$\boxed{\operatorname{Sp}(f^i) = \{0\}}$$

III.5. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f^i et g possèdent un vecteur propre commun, P.

Comme l'unique valeur propre de f^i est 0, et que le sous-espace propre associé est $\mathbb{C}_{i-1}[X]$, $P \in \mathbb{C}_{i-1}[X]$:

$$\deg P \leqslant i-1$$

Or d'après III.3.a, P vecteur propre de g entraîne $\deg P \geqslant n$.

Donc $i \geqslant n+1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $i \geqslant n+1$. D'après III.3.b, X^n est un vecteur propre de g. De plus, d'après III.4.a, $X^n \in \operatorname{Ker} f^i = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.

Donc f^i et g possèdent un vecteur propre commun, X^n.

Conclusion :

$$\boxed{f^i \text{ et } g \text{ possèdent un vecteur propre commun si et seulement si } i \geqslant n+1}$$

III.6. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $f(X^k) = kX^{k-1}$, donc

$$\boxed{A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, d'après III.1 (ou un calcul direct), $g(X^k) = X^{2n-k}$, donc

$$\boxed{B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & 0 \\ 0 & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

III.7.

III.7.a. Pour $n = 1$, les matrices précédentes sont des matrices de taille $2n+1 = 3$, et $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'application linéaire f^2 a pour matrice A_1^2 et $f^2(1) = f^2(X) = 0$, $f^2(X^2) = 2$, et $f^3 = 0$, donc

$$\boxed{A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1^3 = 0}$$

III.7.b. On trouve $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 ($C_3 = -C_1$; C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires) et $[(A_1)^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est aussi de rang 2. Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{rg}\left([(A_1)^i, B_1]\right) = 2 \text{ pour } i = 1 \text{ et } i = 2}$$

III.7.c. *C'est une question de synthèse : il faut rassembler les résultats de III.5 et III.7.b, et les comparer aux conditions trouvées en II.1.b et II.6.*

D'après II.5, f^i et g ont un vecteur propre commun si et seulement si $i \geqslant n+1$. Pour $n=1$ cette condition s'écrit

$$\forall i \in [\![1,3]\!] \qquad f^i \text{ et } g \text{ ont un vecteur propre commun } \iff i \geqslant 2$$

$\boxed{i=1}$ Posons $\varphi = f$ et $\psi = g$. D'après III.7.b, $\operatorname{rg}([\varphi,\psi]) = 2 < 3 = \dim E$ mais φ et ψ n'ont pas de vecteur propre commun :

$$\boxed{\text{La condition nécessaire de la question } \textbf{II.1.b} \text{ n'est pas suffisante}}$$

$\boxed{i=2}$ Posons $\varphi = f^2$ et $\psi = g$. D'après III.7.b, $\operatorname{rg}([\varphi,\psi]) = 2 > 1$ mais φ et ψ ont quand même un vecteur propre commun :

$$\boxed{\text{La condition suffisante de la question } \textbf{II.6} \text{ n'est pas nécessaire.}}$$

Partie 4 (FORME NORMALE POUR UN VECTEUR PROPRE)

IV.1. Comme $\dim E_\lambda(A) \geqslant 2$, on peut trouver (X, X') une famille libre de deux vecteurs de $E_\lambda(A)$.

Si $x_1 = 0$, $X \in \mathcal{N}$. Sinon, on pose $Y = \dfrac{x_1'}{x_1}X - X'$. Alors $y_1 = \dfrac{x_1'}{x_1}x_1 - x_1' = 0$ donc $Y \in \mathcal{N}$.

De plus $Y \in E_\lambda(A)$ et comme (X, X') libre, $Y \neq 0$. Conclusion :

$$\boxed{A \text{ admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre } \lambda}$$

IV.2.

IV.2.a. Pour $n=2$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_2(\mathbb{C})$ et $A_2 \neq 0$.

Pour $n \geqslant 2$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} A_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$ et $A_n \neq 0$ car $A_2 \neq 0$.

Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0_n\}}$$

IV.2.b. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$. Comme $A^T = -A$, il vient pour tout i, j $a_{ij} = -a_{ji}$.

En particulier, pour $i = j$,

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad a_{ii} = 0$$

Donc le i-ème coefficient de la i-ème colonne est nul :

$$\boxed{\text{Les colonnes d'une matrice } M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C}) \text{ sont des éléments de } \mathcal{N}.}$$

IV.2.c.

- $\underline{\text{Montrons que } \varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{A}_n(\mathbb{C}))}$: Linéarité : soient $(M, N) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) + (\lambda M + N)A^T \\ &= \lambda AM + AN + \lambda MA^T + NA^T \\ &= \lambda\varphi(M) + \varphi(N) \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

Stabilité : soit $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \varphi(M)^T &= (AM + MA^T)^T \\ &= M^TA^T + (A^T)^TM^T \\ &= -MA^T - AM && \text{Car } M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C}) \\ &= -\varphi(M) \end{aligned}$$

Donc $\varphi : \mathscr{A}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$. Conclusion

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{A}_n(\mathbb{C}))}$$

- Montrons que $\psi \in \mathscr{L}(\mathscr{A}_n(\mathbb{C}))$: De même, linéarité : soient $(M,N) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\psi(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N)A^T \\ &= \lambda AMA^T + ANA^T \\ &= \lambda\psi(M) + \psi(N)\end{aligned}$$

Donc ψ est linéaire.
Stabilité : soit $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$. Comme $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$,

$$\psi(M)^T = (A^T)^T M^T A^T = -\psi(M)$$

Donc $\psi : \mathscr{A}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$. Conclusion

$$\boxed{\psi \in \mathscr{L}(\mathscr{A}_n(\mathbb{C}))}$$

IV.2.d. Soit $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\varphi(\psi(M)) &= A(AMA^T) + (AMA^T)A^T \\ &= A^2MA^T + AM(A^T)^2 \\ &= A(AM + MA^T)A^T \\ &= \psi(\varphi(M))\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi}$$

IV.3.

IV.3.a.

i) $B^T = (X_1X_2^T - X_2X_1^T)^T = X_2X_1^T - X_1X_2^T = -B$ donc

$$\boxed{B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})}$$

ii) Notons $\overline{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ le conjugué coefficient par coefficient. Supposons $B = 0$ Alors

$$\begin{aligned}B\overline{X}_1 &= (X_1X_2^T - X_2X_1^T)\overline{X}_1 \\ &= X_1X_2^T\overline{X}_1 - X_2X_1^T\overline{X}_1 \\ &= \lambda X_1 - \mu X_2 && \text{Avec } \lambda = X_2^T\overline{X}_1 \text{ et } \mu = X_1^T\overline{X}_1 \\ &= 0 && \text{Car } B = 0\end{aligned}$$

Or (X_1, X_2) est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc elle est libre : $\lambda = \mu = 0$. Mais

$$\mu = X_1^T\overline{X}_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i^{(1)}|^2$$

Donc $\mu = 0$ entraîne $X_1 = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent,

$$\boxed{B \neq 0_n}$$

Comment avoir l'idée ? Il est toujours plus simple d'étudier une équation, donc on part de $B = 0$. Là, on obtient une expression qui ressemble un peu à une combinaison linéaire de X_1 et X_2 : on sait que, si celle-ci est nulle, alors les coefficients sont nuls. Donc on multiplie à droite par un vecteur colonne. Le plus naturel est de tester X_1 (ou X_2). Dans ce cas on arrive à $\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(1)}|^2 = 0$, ce qui est insuffisant sur $\mathbb{C}$. Il faudrait avoir $x_i\bar{x}_i$ et non x_i^2 : qu'à cela ne tienne, on multiplie par $\overline{X}_1$. Ce n'est pas une question facile.

iii) Calculons : $AX_i = \lambda_i X_i$ donc $X_i^T A^T = \lambda_i X_i^T$.

$$\begin{aligned} AB + BA^T &= A(X_1X_2^T - X_2X_1^T) + (X_1X_2^T - X_2X_1^T)A^T \\ &= AX_1X_2^T - AX_2X_1^T + X_1X_2^TA^T - X_2X_1^TA^T \\ &= \lambda_1X_1X_2^T - \lambda_2X_2X_1^T + \lambda_2X_1X_2^T - \lambda_1X_2X_1^T \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)(X_1X_2^T - X_2X_1^T) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{AB + BA^T = (\lambda_1 + \lambda_2)B}$$

iv) De même :

$$\begin{aligned} ABA^T &= A(X_1X_2^T - X_2X_1^T)A^T \\ &= AX_1X_2^TA^T - AX_2X_1^TA^T \\ &= \lambda_1\lambda_2X_1X_2^T - \lambda_2\lambda_1X_2X_1^T \\ &= \lambda_1\lambda_2(X_1X_2^T - X_2X_1^T) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{ABA^T = (\lambda_1\lambda_2)B}$$

IV.3.b. Calculons, à l'aide des égalités ci-dessus,

$$\begin{aligned} (\lambda_1I_n - A)(\lambda_2I_n - A)B &= (\lambda_1\lambda_2I_n - (\lambda_1 + \lambda_2)A + A^2) \\ &= \lambda_1\lambda_2B - (\lambda_1 + \lambda_2)AB + A^2B \\ &= ABA^T - A(AB + BA^T) + A^2B \qquad \text{D'après (iv) et (iii)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{(\lambda_1I_n - A)(\lambda_2I_n - A)B = 0_n}$$

IV.3.c. D'après IV.3.a.i, $B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$, ce qui entraîne d'après IV.2.b que ses vecteurs colonnes sont dans $\mathcal{N}$.

Or $(\lambda_2I_n - A)B = 0_n$ entraîne $AB = \lambda_2B$, d'où $AC_i = \lambda_2C_i$ pour tout colonne C_i de B.

D'après IV.3.a.ii, $B \neq 0$ donc il existe une colonne non nulle. Soit X cette colonne. Elle vérifie $X \neq 0$, $X \in \mathcal{N}$ et $AX = \lambda_2X$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Au moins l'une des colonnes de } B \text{ est un vecteur propre de } A \text{ sous forme normale}}$$

IV.3.d. Soit Y une colonne non nulle de $(\lambda_2I_n - A)B \neq 0_n$. Elle s'écrit donc $Y = (\lambda_2I_n - A)X$ avec X une colonne de B. Comme ci-dessus, $B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$, donc $X \in \mathcal{N}$.

Donc Y est sous forme normale (seconde condition).

De plus, d'après IV.3.b, $(\lambda_1I_n - A)Y = 0$, donc $Y \neq 0$ est bien un vecteur propre de A. Finalement,

$$\boxed{A \text{ possède un vecteur propre sous forme normale}}$$

IV.4. *Nous ne nous sommes pas encore servi de IV.2.c et IV.2.d. Cherchons de ce coté.*

IV.4.a. La première condition s'écrit « B est un vecteur propre de φ » et la seconde « B est un vecteur propre de ψ ».

Or, d'après IV.2.c, φ et ψ vérifient les conditions de II.2, donc la propriété $\mathcal{H}$ et, d'après II.3.b, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ.

Par conséquent,

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \text{ non nulle vérifiant (i) et (ii)}}$$

IV.4.b. De même qu'au IV.3.b, on développe et on remplace :

$$\boxed{(\beta I_n - \alpha A + A^2)B = ABA^T - A(AB + BA^T) + A^2B = 0}$$

IV.4.c. Notons $P = X^2 - \alpha X + \beta \in \mathbb{C}[X]$. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$ tels que $P = (X - \gamma)(X - \delta)$. En évaluant en $X = A$, il vient donc

$$\boxed{\exists(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2, \quad (\gamma I_n - A)(\delta I_n - A)B = 0_n}$$

IV.4.d. De même qu'en IV.3.c, $B \neq 0$ et est antisymétrique, donc admet une colonne non nulle et dans $\mathcal{N}$. Cette colonne X vérifie, comme B, $AX = \delta X$. Ainsi,

$$\boxed{A \text{ possède un vecteur propre sous forme normale}}$$

IV.4.e. On procède comme au IV.3.d : Soit $Y = (\lambda I_n - A)X$ une colonne non nulle de $(\lambda I_n - A)B$, où $X \in \mathcal{N}$ est un colonne de B. Comme $(\gamma I_n - A)(\lambda I_n - A)B = 0$, il vient $AY = \gamma Y$.

Donc Y est un vecteur propre sous forme normale de A :

$$\boxed{A \text{ possède un vecteur propre sous forme normale}}$$

Comme A n'a qu'une seule valeur propre, λ, on vient de montrer que $\gamma = \lambda$.

IV.4.f. Par hypothèse, $\mathrm{Sp}\,(A) = \{\lambda\}$, donc $\delta \notin \mathrm{Sp}\,(A)$. Par définition d'une valeur propre,

$$\boxed{\delta I_n - A \text{ est une matrice inversible}}$$

En développant, on constate que deux polynômes en A commutent :

$$(\gamma I_n - A)(\delta I_n - A) = \beta I_n - \alpha A + A^2 == (\delta I_n - A)(\gamma I_n - A)$$

Donc l'égalité du IV.4.c s'écrit

$$(\delta I_n - A)(\gamma I_n - A)B = 0$$

On peut composer par $(\delta I_n - A)^{-1}$ à gauche, on vient de montrer que cette matrice est inversible :

$$\boxed{(\gamma I_n - A)B = 0}$$

IV.4.g. Par symétrie des roles joués par δ et γ, on applique le résultat du IV.4.d :

$$A \text{ possède un vecteur propre sous forme normale.}$$

Or nous avons traités tous les cas possibles lors des questions IV.4.d à IV.4.f-g. Ainsi, nous avons prouvé que, si A n'a qu'une seule valeur propre, alors elle admet un vecteur propre sous forme normale.

En faisant la synthèse de question IV.3 et IV.4, que A ait au moins 2 valeurs propres ou n'en ait qu'une seule, elle admet un vecteur propre sous forme normale. De plus, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos donc χ_A est scindé et A a au moins une valeur propre : tous les cas ont été traité.

Finalement :

$$\boxed{\text{Toute matrice } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ admet un vecteur propre sous forme normale}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE