

Épreuve de Mathématiques 4

Correction

Exercice 1 (Centrale PC 1 2025)

- 1) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \mapsto G_a(t)e^{-i\xi t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f| = G_a$, et, d'après l'énoncé, G_a est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$. La convergence absolue entraînant la convergence, il vient

$$\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)e^{-i\xi t} dt \text{ converge.}$$

- 2) Appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme, dit « de Leibniz ».

- Préliminaire : Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = tG_a(t)$. Montrons que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Elle est positive et continue. De plus, par croissance comparée, comme $a/2 > 0$,

$$t^3\varphi(t) = (t^2)^2 e^{-at^2/2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, $\varphi(t) = o(1/t^3)$. Or $t \mapsto 1/t^3$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $\alpha = 3 > 1$). Donc, par théorème de comparaison, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par parité, la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Pourquoi étudier $t^3\varphi(t)$ et écrire $(t^2)^2$? Une croissance comparée entre un polynôme et une exponentielle, c'est $x^\alpha e^{-x}$, à la rigueur $x^\alpha e^{-\beta x}$. Il faut donc poser $x = t^2$ pour montrer qu'il y a bien croissance comparée.

- Théorème : Notons $h(\xi, t) = G_a(t)e^{-i\xi t}$, pour $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.
 - Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto h(\xi, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par théorème de composition, car exponentielle l'est.
 - Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(\xi, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1,
 - Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, t) = -itG_a(t)e^{-i\xi t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
 - La fonction φ définie ci-dessus est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \left| \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, t) \right| = tG_a(t) = \varphi(t)$$

Par conséquent, d'après le théorème de Leibniz,

La fonction $\widehat{G}_a$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{G}_a'(\xi) = -i \int_0^{+\infty} tG_a(t)e^{-i\xi t} dt$$

On démontre de manière rigoureusement identique le caractère $\mathcal{C}^1$ de

$$\widehat{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t} dt \end{cases}$$

et la valeur de $\widehat{f}'$ lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux, intégrable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminons l'équation différentielle, puis résolvons la.

- Équation différentielle : Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Intégrons par parties avec

$$\begin{aligned} u &= G_a(t) & u' &= G'_a(t) = -atG_a(t) \\ v &= e^{-i\xi t} & v' &= -i\xi e^{-i\xi t} \end{aligned}$$

Comme $|uv| = G_a$ est de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$, le théorème d'intégration par parties entraîne que

$$\int_{\mathbb{R}} uv' = \int_{-\infty}^{+\infty} -i\xi G_a(t) e^{-i\xi t} dt \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} u'v = \int_{-\infty}^{+\infty} -atG_a(t) e^{-i\xi t} dt$$

sont de même nature, donc convergentes d'après la question 1. De plus

$$-i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t) e^{-i\xi t} dt = [uv]_{-\infty}^{+\infty} + a \int_{-\infty}^{+\infty} tG_a(t) e^{-i\xi t} dt$$

$$\text{Ainsi} \quad -i\xi \widehat{G}_a(\xi) = ia\widehat{G}_a'(\xi)$$

Comme $a \neq 0$, il vient

La fonction $\widehat{G}_a$ est solution de $y' + \frac{\xi}{a}y = 0$.

- Résolution : Cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 a pour solution sur $\mathbb{R}$

$$y : \xi \mapsto Ae^{-\xi^2/(2a)} = AG_{1/a}(\xi)$$

où $A = y(0) \in \mathbb{C}$. Or, d'après l'énoncé,

$$\widehat{G}_a(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t) dt = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

Finalement

$$\widehat{G}_a = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} G_{1/a}$$

- 4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $G_a^2(t) = e^{-at^2} = G_{2a}(t)$. Par conséquent, la valeur de l'intégrale de Gauss étant connue,

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} G_a^2(u) du$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Posons

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{2a}e^{-au^2} & v' &= ue^{-au^2} \\ w &= u & w' &= 1 \end{aligned}$$

Pour $u > 0$, par croissance comparée,

$$vw = -\frac{1}{2a}(u^2)^{1/2}e^{-au^2} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$$

Et de même en $-\infty$ par parité. Donc, par théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_{\mathbb{R}} v'w = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 G_a^2(u) du \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} vw' = -\frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{2a}(u) du$$

sont de même nature, convergentes, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 G_a^2(u) du = [vw]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{2a}(u) du = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 G_a^2(u) \, du \text{ converge et vaut } \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.}$$

5) Calculons $\sigma_T^2(G_a)$.

$$\sigma_T^2(G_a) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_a^2(u) \, du} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 G_a^2(u) \, du$$

Les intégrales ont été déterminées à la question 4, ainsi

$$\sigma_T^2(G_a) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} \right)^{-1} \times \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2a}$$

Calculons aussi $\sigma_F^2(G_a)$.

$$\sigma_F^2(G_a) = \frac{1}{2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} G_a^2(u) \, du} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \widehat{G_a}^2(u) \, du$$

Or, d'après la question 3, $\widehat{G_a}^2 = (2\pi/a) G_{1/a}$, ainsi

$$\begin{aligned} \sigma_F^2(G_a) &= \left(2\pi \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right)^{-1} \times \frac{2\pi}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 G_{1/a}^2(u) \, du \\ &= \frac{2\pi \sqrt{a}}{2\pi a \sqrt{\pi}} \times \frac{a \sqrt{\pi a}}{2} \end{aligned} \quad (\text{d'après la question 4})$$

$$\sigma_F^2(G_a) = \frac{a}{2}$$

Ainsi

$$\boxed{\sigma_T^2(G_a) = \frac{1}{2a} = \gamma(\sigma_F^2(G_a))}$$

Exercice 2 (Centrale TSI 2023, CCINP PC 2020, E3A PC, etc)

Partie 1 (La transformation de Laplace)

- 1) a) Soit $n \geq 0$ un entier. La fonction $f : t \mapsto t^n e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ car composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. Et $f \geq 0$. Étude en $+\infty$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 t^n e^{-xt} = 0$ par croissance comparée donc,

$$f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ converge (intégrales de Riemann $\alpha = 2 > 1$), donc, par théorème de comparaison,

$$\boxed{I_n(x) \text{ converge}}$$

b) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$:

$$I_0(x) = \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} = \frac{0!}{x^{0+1}}$$

Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Intégrons par parties : posons

$$\begin{cases} u = t^{n+1} & u' = (n+1)t^n \\ v = -\frac{1}{x}e^{-xt} & v' = e^{-xt} \end{cases}$$

Par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} uv = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x}t^{n+1}e^{-xt} = 0$. Donc, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$ sont de même nature (convergentes d'après ci-dessus), et

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-xt} dt \\ &= \left[t^{n+1} \times \frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)t^n \frac{e^{-xt}}{-x} dt \\ &= \frac{n+1}{x} I_n(x) \\ &= \frac{n+1}{x} \times \frac{n!}{x^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} \end{aligned} \quad (\mathcal{H}_n)$$

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

- Conclusion :

Pour tout $n \geq 0$, $I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$

- 2) a) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$:

Appartenir à E , c'est trouver A , C et n tels que (etc...) : à chaque fois, pour montrer « $\in E$ », il faut expliciter A , C et n .

- Montrons que la fonction nulle est dans E :

Pour tout $t \geq 1$, $|0| \leq 1$ donc $0 \in E$ avec $A = 1$, $C = 1$ et $n = 0$. Ainsi $\underline{E \neq \emptyset}$. (Important!)

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f_1, f_2 \in E^2$, avec A_1, A_2, C_1, C_2, n_1 et n_2 les constantes associées.

Posons $\triangleright A = \max(A_1, A_2, 1) > 0$

$\triangleright C = |\lambda|C_1 + C_2 > 0$

$\triangleright n = \max(n_1, n_2)$

Pour tout $t \geq A = \max(A_1, A_2, 1)$,

$$\begin{aligned} |\lambda f_1(t) + f_2(t)| &\leq |\lambda| |f_1(t)| + |f_2(t)| \\ &\leq |\lambda| C_1 t^{n_1} + C_2 t^{n_2} \\ &\leq |\lambda| C_1 t^n + C_2 t^n \\ &\leq C t^n \end{aligned}$$

De plus $\lambda f_1 + f_2$ est continue. Ainsi $\lambda f_1 + f_2 \in E$.

Par conséquent

E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$

- b) Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$. Notons $C = \|f\|_\infty + 1 > 0$.

Alors, pour tout $t \geq 1$, $|f(t)| \leq C t^0$. Avec $C = \|f\|_\infty + 1$, $A = 1$ et $n = 0$, $f \in E$. Ainsi,

Toute fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$ appartient à E

c) Avec $A = 0$, $C = 1$ et $n = n$, on a

$$\forall t \geq A, \quad |g_n(t)| = t^n \leq Ct^n$$

Donc

$$\boxed{g_n \in E}$$

d) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in E$. Comme E est un espace vectoriel d'après 2a,

$$F = \text{Vect} \{g_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset E$$

Or une fonction polynomiale est une combinaison linéaire de fonctions g_n , c'est-à-dire un élément de F :

$$\boxed{\text{Toute fonction polynomiale sur } [0, +\infty[\text{ appartient à } E}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de $\mathcal{L}$,

$$\boxed{\mathcal{L}(g_n) = I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}}$$

4) Soit a un réel strictement positif ; montrer que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

5) La fonction $t \mapsto f(t)e^{-at}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Soit $A \geq 0$, $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall t \geq A$, $|f(t)| \leq Ct^n$. Ainsi,

$$\forall t \geq A \quad |t^2 f(t)e^{-at}| \leq Ct^{n+2}e^{-at} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (\text{croissance comparée, } a > 0)$$

Donc, $|f(t)e^{-at}| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $\frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après Riemann.

En conclusion, par théorème de comparaison,

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto f(t)e^{-at} \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[.}$$

6) On fixe un réel $a > 0$. Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre, en majorant sur l'intervalle $[a, +\infty[$ (ou sur $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$).

Soit $D = \mathbb{R}_+^*$ et $I = \mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur D car exponentielle l'est.
- Pour tout $x \in D$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur I .
- La fonction $\varphi(t) = |f(t)|e^{-at}$ est intégrable sur I d'après 5 et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times I \quad |f(t)e^{-xt}| \leq \varphi(t)$$

(Il est **fondamental** que φ ne dépende pas de x . C'est le cœur du théorème. De plus, la majoration doit être vraie « pour tout t dans le domaine d'intégration ».)

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme,

$$\boxed{\text{la fonction } \mathcal{L}(f) \text{ est définie et continue sur } D = \mathbb{R}_+^*.$$

7) D'après 3a, pour tout $f \in E$, $\mathcal{L}(f)$ existe et est une fonction définie et continue sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles. De plus, par linéarité de l'intégrale,

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda \mathcal{L}(g)$$

En conclusion,

La transformée de Laplace est une application linéaire de E dans $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$

Partie 2 (Quelques propriétés des transformées de Laplace)

Dans cette partie, on se donne $f \in E$.

1) Appliquons le théorème de convergence dominée à paramètre continu lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Soit $a > 0$.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t)e^{-xt} = 0$.
- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, de même que la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $\varphi(t) = |f(t)|e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après 3)a) et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[\quad |f(t)e^{-xt}| \leq \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f) = 0$$

2) Appliquons le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme sur l'intervalle $D = \mathbb{R}_+^*$.

Posons $h(x, t) = f(t)e^{-xt}$ pour $(x, t) \in D \times I$, où $I = \mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto h(x, t) = f(t)e^{-xt}$ est $\mathcal{C}^1$ sur D ,
 - Pour tout $x \in D$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est **intégrable** sur I d'après 1.5,
- la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -tf(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur I .
- Soit $a > 0$. Vérifions l'hypothèse de domination sur $[a, +\infty[$. La fonction $\varphi : t \mapsto t|f(t)|e^{-at}$ est intégrable sur I (d'après 1.5 : $t \mapsto tf(t) \in E$) et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+ \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = |tf(t)e^{-xt}| \leq \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme,

La fonction $\mathcal{L}(f)$ est C^1 sur D et $(\mathcal{L}(f))'(x) = - \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt} dt$.

3) a) Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Effectuons une intégration par parties. Posons

$$\begin{aligned} u &= f(t) & v &= e^{-xt} \\ u' &= f'(t) & v' &= -xe^{-xt} \end{aligned}$$

Comme $|uv| = |f(t)e^{-xt}| \leq Ct^n|f(t)|$ pour $t \geq A$, on a, par croissance comparée,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-xt} = 0$$

Donc, par théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_{\mathbb{R}_+} u'v$ et $\int_{\mathbb{R}_+} uv'$ sont de même nature, convergentes car $\int_{\mathbb{R}_+} uv' = -x\mathcal{L}(f)(x)$ converge. Et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt} dt &= [f(t)e^{-xt}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-xe^{-xt}) dt \\ &= -f(0) + x \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

b) Soit $A > 0$, $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ qui conviennent pour f' ($f' \in E$ par hypothèse). Alors

$$\forall t \geq A \quad |tf'(t)| \leq Ct^{n+1}$$

Donc $A_h = A$, $C_h = C$ et $n_h = n + 1$ conviennent, et $\boxed{h \in E}$

Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Montrons l'égalité : effectuons une intégration par parties. Posons

$$\begin{aligned} u &= f(t) & v &= te^{-xt} \\ u' &= f'(t) & v' &= e^{-xt} - xte^{-xt} \end{aligned}$$

Comme $|uv| = |tf(t)e^{-xt}| \leq Ct^{n+1}|f(t)|$ pour $t \geq A$, on a, par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} uv = 0$.

Donc, par théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_{\mathbb{R}_+} u'v$ et $\int_{\mathbb{R}_+} uv'$ sont de même nature, convergentes car $\int_{\mathbb{R}_+} u'v = -x\mathcal{L}(h)(x)$ converge ($h \in E$). Et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} tf'(t)e^{-xt} dt &= [f(t)te^{-xt}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(e^{-xt} - xte^{-xt}) dt \\ &= - \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt + x \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt} dt \end{aligned}$$

On reconnaît $\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt} dt = -(\mathcal{L}(f))'(x)$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad \mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x(\mathcal{L}(f))'(x)}$$

Autre méthode pour l'égalité : Plus d'abstraction et moins de calculs. Soit $g(t) = tf(t)$.

Avec $A_g = A_f$, $C_g = C_f$ et $n_g = n_f + 1$, on a $g \in E$. De plus, g est de classe $\mathcal{C}^1$ (comme produit de $\mathcal{C}^1$), et

$$g'(t) = f(t) + tf'(t) = f(t) + h(t)$$

Or $f \in E$ et $h \in E$ donc, comme E est un espace vectoriel, $g' \in E$.

Nous sommes donc dans les hypothèses de la question 3a ci-dessus :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \mathcal{L}(g')(x) = x\mathcal{L}(g)(x) - g(0)$$

Par linéarité de $\mathcal{L}$ (question 1)4)), $\mathcal{L}(g') = \mathcal{L}(f + h) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(h)$.

De plus $\mathcal{L}(g) = -(\mathcal{L}(f))'$ d'après 2)b), et $g(0) = 0$. Donc finalement, en remplaçant,

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad \mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x(\mathcal{L}(f))'(x)}$$

Partie 3 (Injectivité de la transformation de Laplace)

1) Comme $f \in E$, $\mathcal{L}(f)$ existe et en particulier l'intégrale $\mathcal{L}(f)(1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(s)e^{-s} ds$ existe. Donc

$$\boxed{g \text{ possède une limite finie } L = \mathcal{L}(f)(1) \text{ en } +\infty.}$$

2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = L$ est finie donc, par définition de la limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall t \geq A, \quad |g(t) - L| \leq \varepsilon$$

Ainsi, avec $\varepsilon = 1$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $|g(t)| \leq L + 1$.

De plus, g est continue sur $[0, A]$ donc bornée d'après le théorème des bornes atteintes. Par conséquent,

$$\boxed{g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

3) D'après Partie 1, 2)b), toute fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$ appartient à E :

$$\boxed{g \in E}$$

4) a) La fonction g est une primitive¹ de $f(t)e^{-t}$ continue, donc g est dérivable et $g'(t) = f(t)e^{-t}$. Soient $A \geq 0$, $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ qui conviennent pour f . Alors

$$\forall t \geq A \quad |g'(t)| = |f(t)|e^{-t} \leq |f(t)| \leq Ct^n$$

Donc ces mêmes A , C et n conviennent pour g' : $\boxed{g' \in E}$

On vient de prouver, plus généralement, que si $|f| \leq |g|$, alors $g \in E \implies f \in E$.

Il suffit d'avoir la majoration à une constante près et au voisinage de $+\infty$: $f = O(g)$ est donc suffisant.

On applique Partie 2, 3)a) : pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\mathcal{L}(g) = \frac{1}{x}\mathcal{L}(g') + \frac{1}{x}g(0)$. Or $g(0) = 0$, d'où

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+1)t} dt}$$

C'est-à-dire $\mathcal{L}(g)(x) = \frac{1}{x}\mathcal{L}(f)(x+1)$

b) i) La fonction φ est continue sur $]0, 1]$ comme composée de fonctions continues. En 0,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(u) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = L = \varphi(0)$$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0, 1]}$.

(Ici, il n'y a rien à prolonger, la fonction est définie en 0. Il faut juste vérifier que $\lim_0 \varphi = \varphi(0)$)

ii) On pose le changement de variable $t = -\ln u$ comme suggéré par le début de la question. La fonction $\varphi : u \mapsto -\ln u$ est $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et donc bijective de $]0, 1]$ dans $[0, +\infty[$.

Il vient, d'après le théorème de changement de variable, que les deux intégrales sont de mêmes natures – convergentes d'après 3 – et que

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt = \int_0^1 u^{x-1} \varphi(u) du}$$

Gardez le réflexe, pour un changement de variable, de :

1) poser $u = \dots$, 2) calculer $du = \dots dt$, 3) changer les bornes.

Trois choses à faire. Et, en plus, pour les intégrales généralisées, parler de nature des intégrales : la petite phrase avec φ et parler du « théorème » de changement de variable.

5) Utilisons les questions qui précèdent. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^n \varphi(u) du &= \int_0^{+\infty} g(t)e^{-(n+1)t} dt = \mathcal{L}(g)(n+1) && 4)b)ii) \text{ avec } x = n+1 > 0 \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(n+2)t} dt = \frac{1}{n+1} \mathcal{L}(f)(n+2) && 4)a) \\ &= 0 && \text{car } \mathcal{L}(f) = 0 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 u^n \varphi(u) du = 0}$$

1. Le mot « primitive » doit être prononcé ici.

6) Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 P(u) \varphi(u) \, du &= \sum_{k=0}^d a_k \int_0^1 u^k \varphi(u) \, du && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= 0 && 5) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_0^1 P(u) \varphi(u) \, du = 0}$$

7) On admet que la fonction φ est limite uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales. Ce résultat est une conséquence du théorème de Stone Weierstrass, cf DL2 de l'an dernier.

a) D'après 6),

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 f_n(u) \varphi(u) \, du = 0}$$

b) La fonction φ est continue donc bornée sur $[0, 1]$. Ainsi,

$$\forall t \in [0, 1], \quad |f_n(t) \varphi(t) - \varphi^2(t)| = |\varphi(t)| \times |f_n(t) - \varphi(t)| \leq \|\varphi\|_\infty |f_n(t) - \varphi(t)|$$

En passant à la borne supérieure,

$$\|f_n \varphi - \varphi^2\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \|f_n - \varphi\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'où $(f_n \varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ^2 . Par théorème d'intégration des suites de fonctions,

$$\int_0^1 (\varphi(u))^2 \, du = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(u) \varphi(u) \, du$$

Or, d'après 7a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f_n(u) \varphi(u) \, du = 0$. D'où

$$\boxed{\int_0^1 (\varphi(u))^2 \, du = 0}$$

c) La fonction φ^2 est continue (4bi), positive et d'intégrale nulle. Donc, d'après le théorème intégrale nulle et fonction nulle,

$$\varphi^2 = 0$$

Par conséquent,

$$\boxed{\varphi = 0}$$

8) Pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$g(t) = \varphi(e^{-t}) = 0$$

Donc, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $g'(t) = f(t)e^{-t} = 0$. Ainsi,

$$\boxed{f = 0}$$

Nous venons de prouver que $\mathcal{L}(f) = 0 \implies f = 0$, d'où

$$\text{Ker } \mathcal{L} = \{0\}$$

Plus précisément, $\text{Ker } \mathcal{L} \subset \{0\}$, et l'inclusion $\supset$ est immédiate car $\text{Ker } \mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel.

$$\boxed{\text{La fonction } \mathcal{L} \text{ est injective}}$$