Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 17 novembre 2025

Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Dans cet exercice E désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables.
Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $G_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$G_a(t) = e^{-\frac{1}{2}at^2} \quad \text{(gaussienne de paramètre } a\text{).}$$

On admet la convergence et la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)\ \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

On fixe un réel a strictement positif.

1) Montrer pour tout réel ξ la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)e^{-i\xi t}\ \mathrm{d}t$.

On notera dans la suite $\widehat{G_a} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \xi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G_a(t)e^{-i\xi t}\ \mathrm{d}t \end{cases}$

2) Démontrer que l'application $\widehat{G_a}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

3) Démontrer que $\widehat{G_a}$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du premier ordre que l'on explicitera. En déduire que

$$\widehat{G_a} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}G_{1/a}.$$

4) Démontrer que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_a^2(u)\,du \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 G_a^2(u)\,du$$

sont convergentes et déterminer leurs valeurs.

5) On définit le réel positif $\sigma_F(G_a)$ (resp. $\sigma_T(G_a)$) par la relation

$$\sigma_F^2(G_a) = \frac{1}{2\pi}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \widehat{G_a}^2(u)\,du}{\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{G_a}^2(u)\,du} \quad \text{resp.} \quad \sigma_T^2(G_a) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 G_a^2(t)\ \mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_a^2(t)\ \mathrm{d}t}.$$

Démontrer l'égalité

$$\sigma_T^2(G_a) = \gamma(\sigma_F^2(G_a)),$$

où $\gamma : x \mapsto \dfrac{1}{4x}$.

Pour f un élément non nul d'une certaine classe de fonctions S, on a

$$\sigma_T^2(f)\sigma_F^2(f) \geqslant \frac{1}{4}$$

(inégalité d'Heisenberg). Si f représente un signal réel, $\sigma_T^2(f)$ représente son étalement dans le domaine temporel et $\sigma_F^2(f)$ son étalement dans le domaine fréquentiel. Le principe d'incertitude d'Heisenberg dit alors qu'on ne peut pas localiser précisément et simultanément un signal dans les deux domaines.
Les multiples des gaussiennes sont les seuls éléments de S qui réalisent l'égalité dans l'inégalité d'Heisenberg.
L'application $\gamma : x \mapsto \dfrac{1}{4x}$ vérifie donc

$$\gamma(x) = \min_{f \in S\setminus\{0\} \text{ et } \sigma_F^2(f)=x} \sigma_T^2(f),$$

pour tout réel x strictement positif.

Exercice 2

Ce problème a pour objet l'étude de la transformation de Laplace.
Dans tout ce problème, E désignera l'ensemble constitué par toutes les fonctions f, définies et continues sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles et vérifiant la propriété suivante :
il existe un réel $A \geqslant 0$, un réel $C > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall t \geqslant A, \qquad |f(t)| \leqslant Ct^n$$

Partie 1 (La transformation de Laplace)

1) Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel $x > 0$, on considère l'intégrale généralisée

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

a) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $I_n(x)$ converge.

b) En effectuant une démonstration par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel $x > 0$,

$$I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

2) **a)** Montrer que, muni des opérations usuelles, E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions définies et continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles. On rappelle que

$$E = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \ \middle|\ \exists A \geqslant 0, \exists C > 0, \exists n \in \mathbb{N} / \forall t \geqslant A,\ |f(t)| \leqslant Ct^n \right\}$$

b) Vérifier que toute fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$ appartient à E.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = t^n$ appartient à E.

d) Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ appartient à E.

Pour $f \in E$ et $x > 0$, sous réserve d'existence, on définit

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} \, \mathrm{d}t$$

3) Un exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathcal{L}(g_n)$.

4) Soit a un réel strictement positif ; montrer que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

5) Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$. On pourra se placer sur un segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

6) Montrer que l'application $\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f)$, appelée transformation de Laplace, est une application linéaire de E dans l'espace $\mathscr{C}^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ constitué des applications définies et continues sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles.

Partie 2 (Quelques propriétés des transformées de Laplace)

Dans cette partie, on se donne $f \in E$.

1) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

2) Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que

$$(\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} \, \mathrm{d}t$$

pour tout $x \in]0, +\infty[$.

3) On suppose de plus que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et que $f' \in E$.

a) Montrer que

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b) Vérifier que la fonction $h : t \mapsto t f'(t)$ appartient à E et montrer que

$$\mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x(\mathcal{L}(f))'(x)$$

pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Partie 3 (Injectivité de la transformation de Laplace)

Le but de cette partie est de montrer que $\mathcal{L}$ est injective. Nous admettrons un résultat dans la question 7.

On se donne $f \in E$ et on considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(t) = \int_0^t f(s) e^{-s} \, \mathrm{d}s$$

1) Justifier que $g(t)$ possède une limite finie L lorsque $t \to +\infty$.

2) Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

3) En déduire que $g \in E$.

4) **a)** Montrer que $g' \in E$ et déduire de Partie 2, 3)a), que pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$\int_0^{+\infty} g(t) e^{-xt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(x+1)t} \, \mathrm{d}t$$

b) Soit φ l'application définie sur $[0, 1]$ par

$$\varphi(u) = \begin{cases} g(-\ln u) & \text{pour } u \in]0, 1] \\ L & \text{pour } u = 0 \end{cases}$$

i) Vérifier que φ est continue sur $[0, 1]$.

ii) Montrer à l'aide d'un changement de variable que

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u^{x-1}\varphi(u)\,\mathrm{d}u$$

pour tout $x \in]0,+\infty[$.

On suppose désormais que $\boxed{\mathcal{L}(f) = 0}$

5) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 u^n\varphi(u)\,\mathrm{d}u = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, déterminer $\displaystyle\int_0^1 P(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$.

7) On admet que la fonction φ est limite uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales.

a) Déterminer $\displaystyle\int_0^1 f_n(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 (\varphi(u))^2\,\mathrm{d}u = 0$.

c) Montrer que $\varphi = 0$.

8) En déduire que f est la fonction nulle, puis que $\mathcal{L}$ est injective.

FIN DE L'ÉPREUVE