

Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R} à valeurs réelles. On note, pour $f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|$.

Questions de cours

- 1) Déterminer le tableau de variations de la fonction Arctan . Justifier que Arctan est élément de E et donner $\|\text{Arctan}\|_\infty$.
- 2) Déterminer une expression simple de la fonction $t \mapsto \text{Arctan}(t) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$.

- 3) Soit f une fonction de E .

- a) Montrer que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \text{Arctan}(tx) \times \frac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- b) On pose, pour tout réel x :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \text{Arctan}(tx) \times \frac{f(t)}{1+t^2} dt$$

Montrer que $\Phi(f)$ appartient à E .

- c) Montrer que l'on peut se restreindre à l'intervalle $[0, +\infty[$ pour l'étude de la fonction $\Phi(f)$.
- 4) Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme Φ de E .
 - 5) Montrer que pour tout $f \in E$, $\Phi(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
 - 6) Soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction h .

- a) Justifier que h est continue sur \mathbb{R} .
- b) Montrer que h appartient à E .
- 7) Soit f_0 la fonction constante égale à 1 et $g = \Phi(f_0)$.
- a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.
- b) Pour tout réel x strictement positif, exprimer $g'(x)$ sous forme intégrale.
- c) Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, simplifier l'expression : $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$.
- d) **Une autre expression de g'**
- i) On fixe x , réel de $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
 Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $F(T) = \frac{1}{(1+x^2T)(1+T)}$.
- ii) Montrer que sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $g'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$.
- iii) Donner alors l'expression de g' sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2

Dans ce problème, on étudie certaines intégrales et séries numériques reliées aux intégrales dites de Fresnel. Augustin Fresnel (1788-1827) démontra le caractère ondulatoire de la lumière et, pour cette raison, il est considéré comme un des fondateurs de l'optique moderne.

On note i le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Dans cette partie, on définit la fonction H par l'expression $H(x) = \int_0^x e^{it^2} dt$, où e^{it^2} signifie $\exp(it^2)$

- 1) Démontrer que H est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Donner une expression de $H'(x)$.
- 2) Étudier la parité de la fonction H .
- 3) Si $x > 0$, démontrer que :

$$H(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du.$$

- 4) Pour $x > \sqrt{2\pi}$, en déduire que :

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = -i \frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} du.$$

- 5) En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge.

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Dans cette partie, on étudie la fonction g d'expression :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i} dt.$$

Pour cela, on pose $f(x, t) = \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$.

- 6) Si $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, déterminer les modules des nombres complexes $e^{-x^2(t^2-i)}$ et t^2-i .
- 7) Démontrer que g est définie et continue sur \mathbb{R} (on pourra utiliser un argument de parité).
- 8) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

9) Démontrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

10) On admet dans cette question que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et est égale à $\sqrt{\pi}$. Vérifier que :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}.$$

11) a) Déterminer le module et un argument de i .

b) Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2 - i}$. On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2 - i} = \frac{1 - i}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X - \sqrt{2}}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} + \frac{i}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X + \sqrt{2}}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} + \frac{i}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} \right).$$

c) Démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt = \pi\sqrt{2}$, Donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt$ puis déterminer la valeur de $g(0)$.

12) En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} \times H(x)$$

où la fonction H a été introduite dans la partie I.

Donner ensuite les valeurs de $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$, de $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ et de $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

Partie III - Etude d'une série de fonctions

Dans cette partie, on étudie la fonction S d'expression :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction d'expression $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

13) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

a) Montrer l'identité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0.$$

b) On suppose désormais que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle, et que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Montrer que $\sum (a_n - a_{n+1})$ est une série positive et convergente.

En déduire que la série $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$ converge.

14) Soient $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

15) À l'aide des deux questions précédentes, démontrer que S est définie sur $]0, 2\pi[$.

16) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$ converge, mais ne converge pas absolument.

17) On admet dans cette question que si $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$:

$$\left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}$$

Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq C$$

18) Déterminer la limite, quand x tend vers 0^+ , de :

$$I(x) = \sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$$

19) Déterminer la limite en 0^+ de la fonction $x \mapsto \frac{e^{ix} - 1}{ix}$. Donner alors un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+ .

FIN DE L'ÉPREUVE