Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
Ne pas utiliser de correcteur.
Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On désigne par a un réel strictement positif et on se propose d'étudier pour tout réel x les intégrales :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t, \quad K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2} \cos(\pi x t)\,\mathrm{d}t.$$

1) *Calcul de l'intégrale $J(0)$.*

On rappelle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et égale à $\sqrt{\pi}$.

Pour tout réel strictement positif a, en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $J(0)$.

2) *Calcul de l'intégrale $J(x)$ et d'une intégrale associée.*

a) Justifier la convergence de l'intégrale $J(x)$ pour tout réel x.

b) Établir que la fonction J est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et donner une expression intégrale de $J'(x)$.

c) Établir que la fonction J est solution de l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + \dfrac{\pi x}{2a} y(x) = 0$.

d) En déduire la valeur de $J(x)$ pour tout réel x, puis montrer la convergence de $K(x)$ et l'égalité :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi x^2}{4a}}.$$

Exercice 2

Dans ce problème, on étudie certaines intégrales et séries numériques reliées aux intégrales dites de Fresnel. Augustin Fresnel (1788-1827) démontra le caractère ondulatoire de la lumière et, pour cette raison, il est considéré comme un des fondateurs de l'optique moderne.
On note i le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Dans cette partie, on définit la fonction H par l'expression $H(x) = \displaystyle\int_0^x e^{it^2}\mathrm{d}t$, où e^{it^2} signifie $\exp(it^2)$

1) Démontrer que H est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $H'(x)$.

2) Étudier la parité de la fonction H.

3) Si $x > 0$, démontrer que :

$$H(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

4) Pour $x > 4\pi^2$, en déduire que :

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = -i\frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.$$

5) En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Dans cette partie, on étudie la fonction g d'expression :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2\left(t^2-i\right)}}{t^2-i}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela, on pose $f(x,t) = \dfrac{e^{-x^2\left(t^2-i\right)}}{t^2-i}$.

6) Si $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, déterminer les modules des nombres complexes $e^{-x^2\left(t^2-i\right)}$ et $t^2 - i$.

7) Démontrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser un argument de parité).

8) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

9) Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

10) On admet dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à $\sqrt{\pi}$. Vérifier que :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}.$$

11) **a)** Déterminer le module et un argument de i.

b) Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2-i}$. On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{1-i}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2-X\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right).$$

c) Démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t = \pi\sqrt{2}$, Donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$ puis déterminer la valeur de $g(0)$.

12) En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi}\times H(x)$$

où la fonction H a été introduite dans la partie I.

Donner ensuite les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$.

Partie III - Etude d'une série de fonctions

Dans cette partie, on étudie la fonction S d'expression :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction d'expression $f_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

13) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

a) Montrer l'identité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} a_n\left(b_n - b_{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(a_n - a_{n+1}\right) b_n + a_{N+1}b_N - a_1 b_0.$$

b) On suppose désormais que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle, et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Montrer que $\sum(a_n - a_{n+1})$ est une série positive et convergente.

En déduire que la série $\sum a_n\left(b_n - b_{n-1}\right)$ converge.

14) Soient $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

15) À l'aide des deux questions précédentes, démontrer que S est définie sur $]0, 2\pi[$.

16) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge, mais ne converge pas absolument.

17) On admet dans cette question que si $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$:

$$\left|\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}$$

Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$\left|\frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant C$$

18) Déterminer la limite, quand x tend vers 0^+, de :

$$I(x) = \sqrt{x}\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

19) Déterminer la limite en 0^+ de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{ix} - 1}{ix}$. Donner alors un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

FIN DE L'ÉPREUVE