

Épreuve de Mathématiques 4

Correction

Exercice 1 (E3A PSI 2015)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1,+\infty[$.

- Étude en $t=1$: On pose $t = 1+h$. $(1+h)^2 - 1 = h^2 + 2h = h(h+2)$ donc

$$g(1+h) = \frac{1}{(1+h)^x\sqrt{(1+h)^2-1}} = \frac{1}{(1+h)^x\sqrt{h}\sqrt{h+2}} \sim \frac{1}{1^x\sqrt{h}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2h}}$$

Or $h \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ est intégrable en 0 (Riemann, $\alpha = 1/2 < 1$), donc, par équivalence, la fonction g est intégrable en 0.

- Étude au voisinage de $+\infty$:

$$g(t) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$$

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^{x+1}}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $x+1 > 1$, c'est-à-dire $x > 0$ (Riemann, $\alpha = x+1$). Donc, par équivalence, g est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $x > 0$.

Donc g est intégrable sur $]1,+\infty[$ si et seulement si $x > 0$.
De plus g est positive, donc $|g| = g$: $f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. Conclusion :

$$\boxed{I = \mathbb{R}_+^*}$$

2) Existence : $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Étude au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}} \sim \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.
Or $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ($x \mapsto e^{-\beta x}$ avec $\beta = 1 > 0$).
Donc, par équivalence, $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ l'est aussi.
Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$ converge.

Calcul : Effectuons le changement de variable $u = e^x$, où $x \mapsto e^x$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[0,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$. Donc le théorème de changement de variable s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \int_1^{+\infty} \frac{1/u}{u+1/u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = [\operatorname{Arctan} u]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{4}}$

3) La fonction φ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$.
Effectuons le changement de variable $t=\varphi(u)$ (donc $\mathrm{d}t=\mathrm{sh}\,(u)\,\mathrm{d}u$).
D'après le théorème de changement de variable, les deux intégrales sont de même nature, or d'après 1) l'une des deux converge, donc toutes les intégrales convergent.

$$f(1)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{sh}\,(u)\,\mathrm{d}u}{\mathrm{ch}\,(u)\sqrt{\mathrm{sh}^{\,2}(u)}}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{ch}\,(u)}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{e^u+e^{-u}}$$

Car $\mathrm{ch}^{\,2}-1=\mathrm{sh}^{\,2}$ et $\mathrm{sh}\geqslant 0$ sur $[0,+\infty[$. En conclusion, d'après 2),

$$\boxed{f(1)=\frac{\pi}{2}}$$

4) Comme nous l'indique l'énoncé,

$$\left(\frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}\right)'=\frac{\mathrm{ch}^{\,2}-\mathrm{sh}^{\,2}}{\mathrm{ch}^{\,2}}=\frac{1}{\mathrm{ch}^{\,2}}$$

De plus, avec le même changement de variable qu'à la question précédente,

$$f(2)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{t^2-1}}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{ch}^{\,2}(u)}=\left[\frac{\mathrm{sh}\,(u)}{\mathrm{ch}\,(u)}\right]_0^{+\infty}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}\,(X)}{\mathrm{ch}\,(X)}$$

Or, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\mathrm{sh}\,(X)}{\mathrm{ch}\,(X)}=\dfrac{e^X-e^{-X}}{e^X+e^{-X}}\sim\dfrac{e^X}{e^X}=1$. Donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}\,(X)}{\mathrm{ch}\,(X)}=1$, et

$$\boxed{f(2)=1}$$

5) Soit $x\in I$.

$$\forall t\in]1,+\infty[,\qquad \frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}\geqslant 0$$

Donc, par positivité de l'intégrale, $\boxed{f \text{ est positive sur } I}$

6) Pour tout $t>1$, $\ln(t)>0$ donc $x\mapsto e^{-x\ln t}=\dfrac{1}{t^x}$ est décroissante.
(Exemple typique où on commence à chercher au brouillon, puis au propre on « renverse » la rédaction.)
Soit $(x,y)\in I^2$ tels que $x\leqslant y$. D'après ci-dessus

$$\forall t\in]1,+\infty[\qquad \frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}\geqslant\frac{1}{t^y\sqrt{t^2-1}}$$

Donc par croissance de l'intégrale, $f(x)\geqslant f(y)$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } I}$$

7) Soit $a>0$, montrons que f est dérivable sur $[a,+\infty[$. Soit $h(x,t)=\dfrac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*\times]1,+\infty[$.
Posons $\varphi(t)=\dfrac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}}$ pour $t\in]1,+\infty[$. φ est continue et positive (car $t\geqslant 1$ donc $\ln t\geqslant 0$).
Étude en $t=1$: $t=1+h$ et

$$\varphi(1+h)=\frac{\ln(1+h)}{(1+h)^a\sqrt{h}\sqrt{2+h}}\sim\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2}}$$

Donc φ est prolongeable par continuité en $t=1$ par $\varphi(1)=0$. Donc φ est intégrable en 0.
Étude au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(t)=\frac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}}\sim\frac{1}{t^{a+1}(\ln t)^{-1}}$$

On reconnaît une intégrale de Bertrand qu'il faudrait étudier (cf cours). Donc φ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Donc φ est intégrable sur $]1,+\infty[$.
<u>Théorème de dérivation</u> :

- $\forall t \in]1,+\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}$.
- $\forall x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]1,+\infty[$ (d'après 1)) ;
  la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]1,+\infty[$.
- Soit $\varphi :]1,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ la fonction définie ci-dessus. φ est **intégrable sur** $]1,+\infty[$ d'après les préliminaires, et

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]1,+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}} \leqslant \frac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,+\infty[\text{ et } f'(x) = \int_1^{+\infty} -\frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t.}$$

Comme ce résultat est vrai pour tout $a > 0$, $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \bigcup_{a>0} [a,+\infty[= I}$

Comme $\dfrac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}} \geqslant 0$ sur $]1,+\infty[$, $f' \leqslant 0$ par croissance de l'intégrale, puis $\boxed{f \text{ décroissante sur } I}$

8) Soit $x \in I$ fixé.
$v' : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1,+\infty[$ et $v : t \mapsto \sqrt{t^2-1}$ en est une primitive.
$u : t \mapsto \dfrac{1}{t^{x+1}}$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ de dérivée $u' : t \mapsto -\dfrac{(x+1)}{t^{x+2}}$.
$u \times v : t \mapsto \dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+1}}$ est de limite nulle en 1 et en $+\infty$.
Comme l'intégrale de gauche ($f(x)$) converge, le théorème d'intégration par partie s'écrit

$$f(x) = [uv]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -(x+1)\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+2}}\,\mathrm{d}t = (x+1)\int_1^{+\infty} \frac{t^2-1}{t^{x+2}\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$$

En cassant la fraction, comme toutes les intégrales existent, on a alors

$$f(x) = (x+1)\left(f(x) - f(x+2)\right)$$

On en déduit que

$$\boxed{f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)}$$

9) *On exprime les premiers termes de $f(2p)$ sans effectuer les calculs, puis on conjecture une formule, que l'on simplifie, et finalement au propre on se contente de la montrer par récurrence.*
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_p : \quad f(2p) = \frac{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}$$

est vraie pour tout $p \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: est vraie car $f(2) = 1$ d'après 4.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie.

$$\begin{aligned} f(2p+2) &= \frac{2p}{2p+1} f(2p) && \text{(question 8)} \\ &= \frac{2^2p^2}{(2p+1)(2p)} \frac{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2}{(2p-1)!} && (\mathcal{H}_p) \\ &= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall p \geqslant 1 \qquad \dfrac{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}}$

10) Comme, d'après la question 8,

$$\forall x > 0, \qquad \varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x+2) = (x+1)f(x+1)\frac{x}{x+1}f(x) = \varphi(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est périodique de période 1.}}$$

De plus $\varphi(1) = 1 \times f(1)f(2) = \dfrac{\pi}{2}$ d'après les questions 3 et 4. Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) = \varphi(1) = \frac{\pi}{2}}$$

11) Par définition de φ, $\varphi(x) = xf(x)f(x+1)$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 7. Donc φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier en 1 :

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x+1) = \varphi(1) = \frac{\pi}{2}$$

Donc par 1-périodicité de φ, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$, ce qui s'écrit aussi

$$\varphi(x) = xf(x+1)f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

Or $f(x+1) \underset{0}{\sim} f(1) = \dfrac{\pi}{2}$, d'où

$$\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}}$$

12) D'après 10, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = nf(n)f(n+1) = \dfrac{\pi}{2}$. Donc $\boxed{f(n)f(n+1) = \dfrac{\pi}{2n}}$.

Comme f est décroissante et positive, pour tout $n \geqslant 2$,

$$f(n)f(n+1) \leqslant (f(n))^{\leqslant} f(n-1)f(n)$$

En remplaçant, il vient

$$\frac{\pi}{2n} \leqslant f(n)^2 \leqslant \frac{\pi}{2(n-1)}$$

Puis

$$1 \leqslant \frac{2n}{\pi}f(n)^2 \leqslant \frac{n}{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{\pi}f(n)^2 = 1$, puis, toujours comme $f \geqslant 0$,

$$\boxed{f(n) \underset{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

13) *C'est encore une fois la preuve du théorème de comparaison série/intégrale qui nous montre la voie : il faut passer d'une limite sur $\mathbb{N}$ à une limite sur $\mathbb{R}$ grâce à la décroissance de f.*

Pour tout $x \geqslant 1$, comme f est décroissante, avec $n = \lfloor x \rfloor$,

$$f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$$

Puis

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}}f(n+1) \leqslant \sqrt{\frac{2x}{\pi}}f(x) \leqslant \sqrt{\frac{2x}{\pi}}f(n)$$

Or $\sqrt{\dfrac{2x}{\pi}}f(n) \sim \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}f(n) \sim 1$, et de même $\sqrt{\dfrac{2x}{\pi}}f(n+1) \sim \sqrt{\dfrac{2(n+1)}{\pi}}f(n+1) \sim 1$.

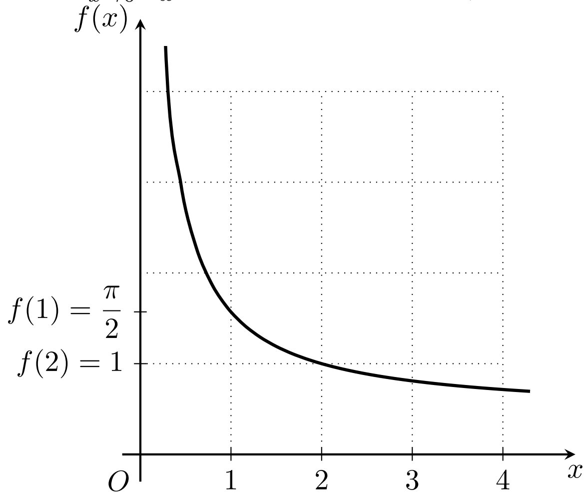
Donc, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2x}{\pi}}f(x) = 1$, et

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$$

14) *Cette question peut se faire sans avoir traité les précédentes : on se contente d'admettre les résultats – à la limite en 0^+ près.*

D'après 6, f est décroissante. D'après 11, $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. D'après 13, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. D'où le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
f	$+\infty$	0



15) L'équivalent de f en $+\infty$ obtenu à la question 13 nous donne celui de φ :

$$\varphi(x) = xf(x)f(x+1) \sim x\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sqrt{\frac{\pi}{2(x+1)}} \sim \frac{\pi}{2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$ (limite sur les réels). Or φ est 1-périodique, donc φ est constante :

$$\forall x > 0 \qquad \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x+n) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est constante sur } \mathbb{R}^{+*}}$$

Exercice 2 (CCP PC 2014)

Partie 1 (Préliminaires)

1) Montrons que $E \neq \emptyset$: La fonction $f = 0$ est continue et 2π-périodique donc $f \in E$: $E \neq \emptyset$.

Montrons que E est stable par combinaison linéaire :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in E^2$. La fonction $\lambda f + g$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \qquad (\lambda f + g)(x + 2\pi) &= \lambda f(x + 2\pi) + g(x + 2\pi) \\ &= (\lambda f + g)(x) \end{aligned}$$

Donc $\lambda f + g \in E$.

Conclusion :

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

2) Soit $f \in E$. Par 2π-périodicité, $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{f(x) \mid x \in [-\pi,\pi]\}$.
Or f est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$, donc bornée (et atteint ses bornes) sur ce segment.
Ainsi, $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est bornée :

$$\boxed{\text{Toute fonction appartenant à } E \text{ est bornée}}$$

Partie 2 (Étude d'un opérateur)

1) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$$\forall t \in \mathbb{R}, |p_n(t)| \leqslant r^n$$

Donc en passant à la borne supérieure, $\|p_n\|_\infty$,

$$\|p_n\|_\infty \leqslant r^n$$

Or $\sum r^n$ converge car $0 \leqslant r < 1$ (série géométrique).
Donc, par majoration, $\sum \|p_n\|_\infty$ converge. En conclusion,

$$\boxed{\text{La série } \sum p_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}}$$

On pouvait aussi faire une étude de fonction, en restreignant le domaine d'étude à $[-\pi,\pi]$ par 2π-périodicité de p_n, puis $[0,\pi]$ par parité et faire un tableau de variation. C'est plus long, l'étude étant plus fine, mais ça ne change rien au résultat.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $\cos u = \Re(e^{iu})$, calculons : soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} r^n e^{int} = re^{it}\frac{1-r^N e^{iNt}}{1-re^{it}}$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} r^N e^{iNt} = 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{int} &= \frac{re^{it}}{1-re^{it}} \\
&= \frac{re^{it}(1-re^{-it})}{(1-re^{it})(1-re^{-it})} \\
&= \frac{re^{it}-r^2}{1-re^{it}-re^{-it}+r^2} \\
&= \frac{re^{it}-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(t) &= 1 + 2\Re\left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{int}\right) \\
&= 1 + \frac{2r\cos(t)-2r^2}{1-2r\cos(t)+r^2} \\
&= \frac{1-2r\cos(t)+r^2+2r\cos(t)-2r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P(t) = \frac{1-r^2}{r^2-2r\cos(t)+1}}$$

c) La fonction P est définie et continue sur $\mathbb{R}$ d'après son expression obtenue ci-dessus, et 2π périodique car cos l'est. Donc $P \in E$.
D'après 1.1.2,

$$\boxed{P \text{ est bornée}}$$

N'hésitez pas à appliquer le résultat d'une question qui précède, même si vous n'avez pas su faire cette question.

2) Montrons que $u : E \to E$: Soit $f \in E$.

- Montrons que $u(f)$ est 2π-périodique :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f)(x+2\pi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x+2\pi-t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{Car } P \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\ &= u(f)(x) \end{aligned}$$

Donc $u(f)$ est 2π-périodique.

- Montrons que $u(f)$ est continue : appliquons le théorème de continuité sous le signe somme.
Recherche d'une fonction φ :
La fonction P est bornée d'après 2, donc $\sup_{\mathbb{R}} |P| = \|P\|_\infty$ existe.
Notons $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \|P\|_\infty |f(t)|$. Cette fonction est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ donc intégrable sur ce segment.
Théorème :
  - Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, la fonction $x \mapsto P(x-t)f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car P l'est.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto P(x-t)f(t)$ est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ car P et f sont continues sur $\mathbb{R}$.
  - La fonction φ est intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$ d'après ci-dessus et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi] \qquad |P(x-t)f(t)| \leqslant \|P\|_\infty |f(t)| = \varphi(t)$$

(Il est **fondamental** *que φ ne dépende pas de x. C'est le cœur du théorème.)*
Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme,

La fonction $u(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi,

$$\boxed{u(f) \in E}$$

Montrons que u est linéaire : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in E^2$,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(\lambda f + g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)(\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \lambda u(f)(x) + u(g)(x) \end{aligned}$$

Donc $u(\lambda f + g) = \lambda u(f) + u(g)$: u est linéaire.
Conclusion : $u : E \to E$ linéaire, donc

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E}$$

3) La fonction P est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions $\mathscr{C}^1$, et P' est continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ donc bornée d'après 2 : $\|P'\|_\infty = \sup\limits_{\mathbb{R}} |P'|$ existe.

Posons $\varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi}\|P'\|_\infty f(t)$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$. Elle est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ donc intégrable (l'intégrale n'est pas généralisée).

- $\forall t \in [-\pi, \pi]$, la fonction $x \mapsto h(x,t) = \dfrac{1}{2\pi}P(x-t)f(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car P l'est.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ (intégrale sur un segment) ; la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2\pi}P'(x-t)f(t)$ est continue donc continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$.
- Soit $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}_+$ définie ci-dessus, intégrable sur $[-\pi, \pi]$ (segment),

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi], \qquad |h(x,t)| = \frac{1}{2\pi}\left|P'(x-t)f(t)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|P'\|_\infty |f(t)| = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{g \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } g'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P'(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Nous venons de montrer que $\operatorname{Im} u \subset E \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Or il existe des fonctions continues 2π-périodique qui ne sont pas $\mathscr{C}^1$ (par exemple $|\sin|$).
Donc $\operatorname{Im} u \subsetneq E$:

$$\boxed{u \text{ n'est pas surjectif}}$$

4) **a)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f,g) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(\lambda f + g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\lambda f + g)(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lambda f(t) + g(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda c_n(f) + c_n(g) && \text{Par linéarité de l'intégrale.}
\end{aligned}$$

Donc $\varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$.

$$\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire}}$$

b) Soit $f \in E$, que l'on suppose de plus de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{e^{-int}}{-in}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{-2in\pi}\left(\underbrace{f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{in\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t\right) && \text{Par } 2\pi\text{-périodicité}
\end{aligned}$$

On vérifie ses primitive, on vérifie le dénominateur dès qu'il y a une barre de fraction.

Donc

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{M}{n}$$

Finalement, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} c_n(f) = 0}$$

Exercice 9 de la feuille d'intégration, théorème de Riemann-Lebesgue.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(f)_n &= c_n(f) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)e^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}e^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k+n)t}\,\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

Or, pour $p \in \mathbb{Z}^*$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ipt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{ipt}}{ip}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Et pour $p=0$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ipt}\,\mathrm{d}t = 2\pi$.

Vous avez déjà rencontré ce calcul dans la question de cours $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-e^{it}}\,\mathrm{d}t = \pi$.

Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour } n \notin \{-k,k\},\ c_n(f)=0, \text{ et } c_{-k}(f) = c_k(f) = \frac{1}{2}}$$

5) **a)** Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\cos(n(x-t)) = \cos(nx)\cos(nt) + \sin(nx)\sin(nt)}$$

b) *Vous voulez écrire* $u(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ *sous forme de somme de série. Or* $P(t) = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)$ *s'écrit comme la somme d'une série. Donc vous avez besoin de deux choses : intervertir les limites, et vérifier que remplacer* $P(x-t)$ *par la somme donne bien le résultat attendu.*

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Montrons que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} p_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}g_n(x)$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^n\cos(n(x-t))f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{r^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(nx)\cos(nt)+\sin(nx)\sin(nt)\right]f(t)\,\mathrm{d}t && \text{d'après 5a} \\
&= r^n\left[\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)f(t)\,\mathrm{d}t\right)\cos(nx) + \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}t\right)\sin(nx)\right] && \text{linéarité} \\
&= \frac{1}{2}g_n(x)
\end{aligned}$$

- Montrons que $t \mapsto \displaystyle\sum_n p_n(x-t)f(t)$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$:

  Posons $f_n(t) = p_n(x-t)f(t)$, pour tout $t \in [-\pi,\pi]$.
  Comme la fonction f est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$, elle est bornée (et atteint ses bornes) sur ce segment : $\|f\|_\infty$ existe. Ainsi,

$$\forall t \in [-\pi,\pi], \qquad |f_n(t)| = |p_n(x-t)f(t)| \leqslant r^n\|f\|_\infty$$

  Donc $\|f_n\|_\infty \leqslant r^n\|f\|_\infty$. Or $\sum r^n$ converge (série géométrique, $0 \leqslant r < 1$).
  Donc, par majoration, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge :

$$\text{La série } \sum f_n \text{ converge normalement sur } [-\pi, \pi]$$

- Théorème d'intégration terme à terme :
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[-\pi, \pi]$;
  - La série $\sum_n f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-\pi, \pi]$;

  Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $\sum_n \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

- Conclusion :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(x-t)\right) f(t)\,\mathrm{d}t && \text{Par définition de } P\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= g_0(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\\
&= g_0(x) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t && \text{D'après le troisième point ci-dessus}\\
&= g_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) && \text{D'après le premier point ci-dessus}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)}$$

c) Soit $p \in \mathbb{Z}$. D'après 5)b), pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$. Ainsi,

$$c_p(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t$$

Montrons la convergence uniforme sur $[-\pi, \pi]$ de la série $\sum f_n$, avec $f_n(t) = g_n(t)e^{-ipt}$, pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|f_n(x)| = r^n |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \left|e^{-ipx}\right| \leqslant r^n(|a_n| + |b_n|)$$

Or, $\begin{aligned}|a_n| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)\cos(nt)|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$ et, de même, $\begin{aligned}|b_n| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$

Ainsi,

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{2r^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t = Mr^n$$

Puis,

$$\|f_n\|_\infty \leqslant Mr^n$$

Or $\sum r^n$ converge (série géométrique, $0 \leqslant r < 1$). Donc, par majoration, $\sum \|f_n\|_\infty$ aussi : $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-\pi, \pi]$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[-\pi, \pi]$.
Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$c_p(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t$$

<u>Calcul de la somme</u> : Pour $n = 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g_0(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = c_0(f) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ipt} \, \mathrm{d}t &= 0 && \text{si } p \neq 0 \\ &= 2\pi c_0(f) && \text{si } p = 0 \end{aligned}$$

Pour $n \geqslant 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = r^n a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t + r^n b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t$$

De plus, d'après 4c, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = \pi$ si $|p| = n$, et 0 sinon.

De même, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = -i\pi$ si $p = n$, $i\pi$ si $p = -n$ et 0 sinon. En remplaçant,

$$\begin{aligned} &\text{Si } n \neq |p| && \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = 0 \\ &\text{Si } n = p && \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = r^n a_n \pi - r^n i b_n \pi \\ &&& \phantom{\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t} = 2\pi r^n c_n(f) \qquad \text{Car } \cos(nt) - i\sin(nt) = e^{-int} \\ &\text{Si } n = -p && \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = r^n a_n \pi + r^n i b_n \pi \\ &&& \phantom{\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t} = 2\pi r^n c_{-n}(f) \qquad \text{Car } \cos(nt) + i\sin(nt) = e^{int} = e^{-i(-n)t} \end{aligned}$$

Finalement, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t$ ne contient que le terme $n = |p|$, et vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = 2\pi r^{|p|} c_p(f)$$

Conclusion :

$$\boxed{c_p(g) = r^{|p|} c_p(f)}$$

6) a) Soit $f \in E$ non nulle et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $u(f) = \lambda f$.
En appliquant φ définie à la question 4, $\varphi(u(f)) = \lambda \varphi(f)$, c'est-à-dire

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \qquad c_p(u(f)) = \lambda c_p(f)$$

Or, d'après 5c, où nous avions noté $g = u(f)$,

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \qquad c_p(u(f)) = r^{|p|} c_p(f)$$

Ainsi, en soustrayant,

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \qquad (r^{|p|} - \lambda) c_p(f) = 0$$

Si $\lambda \notin \{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, alors $\forall p \in \mathbb{Z}$, $c_p(f) = 0$. D'après le résultat donné par l'énoncé, $f = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent, $\lambda \in \{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \backslash \{0\} \; u(f) = \lambda f\} \subset \{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Montrons l'autre inclusion : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, posons $\lambda = r^k$, et $f_k(x) = \cos(kx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 4c, $c_{\pm k}(f_k) = \dfrac{1}{2}$ et $c_p(f_k) = 0$ pour tout $p \notin \{-k, k\}$.

Calculons $u(f_k)$: d'après la question 5b, $u(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{i}(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

Ainsi, pour f_k, $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$ pour tout $n \neq k$, et $a_k = 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u(f_k)(x) &= g(x) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) && \text{Question 5b} \\
&= r^k a_k \cos(kx) && \text{Tous les autres coefficients sont nuls} \\
&= r^k f_k(x) && a_k = 1 \quad \text{et} \quad f_k(x) = \cos(kx)
\end{aligned}$$

Comme $f_k \neq 0$, on a donc $\lambda = r^k \in \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \backslash \{0\},\ u(f) = \lambda f\}$.
Pour $k = 0$, $f_0 = 1$ vérifie $a_n = b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $c_0(f_0) = 1$. D'où $u(f) = f$. *On peut aussi calculer directement $u(f)$ en utilisant la convergence uniforme de la série définissant P (question 2a).*

$$\{r^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \backslash \{0\},\ u(f) = \lambda f\}$$

Conclusion : par double inclusion,

$$\boxed{\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \backslash \{0\},\ u(f) = \lambda f\} = \{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}}$$

b) *Nous allons voir d'ici peu que u injectif équivaut à 0 n'est pas valeur propre de u : simple changement de formulation.*
Si u n'est pas injectif, alors il existe $f \neq 0$ tel que $u(f) = 0f$. Or $0 \notin \{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Donc c'est absurde. Conclusion :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u : E \to E \text{ est injectif}}$$

Partie 3 (Produit de convolution, opérateurs associés)

1) *C'est une généralisation de la question 2 de la partie 2.*

- Montrons que h est 2π-périodique :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x + 2\pi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + 2\pi - t) g(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) g(t)\, \mathrm{d}t && \text{Car } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\
&= h(x)
\end{aligned}$$

Donc h est 2π-périodique.

- Montrons que h est continue : appliquons le théorème de continuité sous le signe somme.
Recherche d'une fonction φ :
La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc bornée et atteint ses bornes : $\sup_{[0,2\pi]} |f|$ existe. De plus, $|f|$ est 2π-périodique, donc $\sup_{\mathbb{R}} |f|$ existe et vaut $\sup_{[0,2\pi]} |f|$.
Notons $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = |g(t)| \sup_{\mathbb{R}} |f|$. Cette fonction est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ donc intégrable sur ce segment.
Théorème :

- Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, la fonction $x \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car f l'est.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ car f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction φ est intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$ d'après ci-dessus et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi] \qquad |f(x-t)g(t)| \leqslant |g(t)| \sup_{\mathbb{R}} |f| = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme,

La fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion :

$$\boxed{h \in \mathcal{C}_{2\pi}}$$

2) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On effectue le changement de variables $u = x - t$: $\begin{cases} t = \pi \Longrightarrow u = x - \pi \\ t = -\pi \Longrightarrow u = x + \pi \end{cases}$

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{Par périodicité de } u \mapsto f(u)g(x-u) \\ &= g * f(x) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall (f,g) \in \mathcal{C}_{2\pi}^2 \quad f * g = g * f}$$

b) Soit $\varepsilon \in \mathcal{C}_{2\pi}$, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on ait : $f * \varepsilon = f$. Alors, d'après l'énoncé,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(f * \varepsilon) = c_n(f)c_n(\varepsilon) = c_n(f)$$

En prenant par exemple $f = f_k$ pour $k \in \mathbb{N}$, on prouve donc que $c_n(\varepsilon) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Or d'après la question 4b de la partie 1, $\lim_{n \to +\infty} c_n(\varepsilon) = 0$. Ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Il ne peut pas exister } \varepsilon \in \mathcal{C}_{2\pi}, \text{ de classe } \mathscr{C}^1, \text{ telle que pour tout } f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \text{ on ait : } f * \varepsilon = f.}$$

3) **a)** <u>Montrons que Θ est linéaire</u> : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(f,g) \in \mathcal{C}_{2\pi}^2$,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Theta(\lambda f + g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x-t)(\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \lambda\Theta(f)(x) + \Theta(g)(x) \end{aligned}$$

Donc $\Theta(\lambda f + g) = \lambda\Theta(f) + \Theta(g)$: Θ est linéaire.
<u>Montrons que $\Theta : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathcal{C}_{2\pi}$</u> : Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. D'après la question 1, $\Theta(f) \in \mathcal{C}_{2\pi}$.
<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\Theta \in \mathscr{L}(\mathcal{C}_{2\pi})}$$

.

b) Soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
|c_n(\psi)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\psi(t)e^{-int}\right|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(t)|\,\mathrm{d}t && \text{Car } \left|e^{i\theta}\right| = 1 \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|\psi\|_\infty\,\mathrm{d}t && \text{Car } \forall t,\ |\psi(t)| \leqslant \|\psi\|_\infty \\
&\leqslant \|\psi\|_\infty
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$S_\psi = \{c_n(\psi), n \in \mathbb{Z}\} \text{ est borné et } \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\psi)| \leqslant \|\psi\|_\infty$$

c) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|\Theta(f)(x)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(x-t)|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|\psi\|_\infty\,|f(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad |\Theta(f)(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t\|\psi\|_\infty}$$

On intègre :

$$\begin{aligned}
\|\Theta(f)\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Theta(f)(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t\|\psi\|_\infty && \text{D'après ci-dessus}
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi},\qquad \|\Theta(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1\|\psi\|_\infty}$$

d) On procède comme à la question 6a de la partie 1 :
Montrons que $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E\backslash\{0\}\ \Theta(f) = \lambda f\} \subset S_\psi$:
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ tels que $f \neq 0$ et $\Theta(f) = \lambda f$. Comme $\Theta(f) = \psi * f$,

$$\forall n \in \mathbb{Z},\qquad c_n(\Theta(f)) = c_n(\psi)c_n(f) = \lambda c_n(f)$$

Or $f \neq 0$ et φ injective : il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $c_n(f)$.
Pour ce $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda = c_n(\psi)$, donc

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E\backslash\{0\}\ \Theta(f) = \lambda f\} \subset S_\psi$$

Montrons que $S_\psi \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E\backslash\{0\}\ \Theta(f) = \lambda f\}$:
Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\lambda = c_k(\psi)$. Posons $f_k(x) = e^{ikx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Theta(f_k)(x) &= f_k * \psi(x) && \text{D'après la question 2a} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)e^{ik(x-t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right)e^{ikx} \\
&= c_k(\psi)f_k(x)
\end{aligned}$$

Donc, $\Theta(f_k) = c_k(\psi) f_k$ et $f_k \neq 0$. Ainsi,

$$S_\psi \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \backslash \{0\} \; \Theta(f) = \lambda f\}$$

$$\boxed{S_\psi \text{ est exactement l'ensemble des } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tels qu'il existe } f \neq 0 \text{ dans } \mathcal{C}_{2\pi}, \text{ vérifiant } \Theta(f) = \lambda f}$$

On remarque que tout est plus simple sur $\mathbb{C}$. L'intégration est rapide et il n'est pas nécessaire de distinguer le cas $k = 0$.

e) Θ est injective si et seulement si $0 \notin S_\psi$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\psi) \neq 0$.

FIN DE L'ÉPREUVE