Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'utilisation d'effaceurs chimiques ou de « vernis » de masquage est interdite. Tous les textes sont obligatoirement écrits à l'encre bleue foncée ou noire. L'usage du crayon à papier est interdit. D'autres couleurs peuvent être utilisées pour améliorer la présentation. Il est interdit de coller, couper les copies et adjoindre des brouillons.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On pose, lorsque cela est possible $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\sqrt{t^2-1}}$

1) Déterminer l'ensemble de définition I de f.

2) Montrer la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}$.

3) À l'aide du changement de variable $t = \mathrm{ch}\,(u) = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$, calculer $f(1)$.

4) Calculer $f(2)$. *On pourra remarquer que la dérivée de* $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ *est égale à* $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.

5) Vérifier que f est positive sur I.

6) En considérant deux réels $x < y$ de I, montrer que f est décroissante sur I.

7) Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et préciser l'expression de $f'(x)$. Retrouver alors le résultat de la question précédente.

8) Soit $x \in I$. Démontrer la relation

$$f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$$

On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties et calculer $f(x) - f(x+2)$.

9) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.

10) Pour tout réel $x > 0$, on pose

$$\varphi(x) = x f(x) f(x+1)$$

Prouver que $\varphi(x+1) = \varphi(x)$. Calculer $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

11) En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

12) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n)f(n+1) = \dfrac{\pi}{2n}$. En déduire que $f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

13) En utilisant des parties entières, prouver que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

14) Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f sur I et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

15) Prouver que la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 2

Partie 1 (Préliminaires)
Notons $E = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \ 2\pi\text{-périodique}\}$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que toute fonction appartenant à E est bornée.

Partie 2 (Étude d'un opérateur)
Soit $r \in]0,1[$ fixé.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction p_n par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad p_n(t) = r^n \cos(nt)$$

a) Montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum p_n$.

b) Pour tout réel t, on pose alors $P(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)$. Montrer que

$$P(t) = \frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}$$

c) Montrer que P est bornée.

2) Pour tout $f \in E$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $u(f) \in E$, en déduire que u est un endomorphisme de E.

3) Montrer que la fonction $g = u(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Est-ce que u est surjectif ?

4) On définit l'application $\varphi : E \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ par $\varphi(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ où

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que φ est une application linéaire. On admettra dans la suite de ce problème que φ est injective.

b) Soit $f \in E$, que l'on suppose de plus de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} c_n(f) = 0$$

c) Pour $f(t) = \cos(kt)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\varphi(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite

$$\forall n \notin \{-k,k\}, \quad c_n(f) = 0 \qquad \text{et} \qquad c_{-k}(f) = c_k(f) = \frac{1}{2}$$

5) Soit $f \in E$ fixé.

a) Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Développer $\cos(n(x-t))$.

b) On note $g = u(f)$, $g_0(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = c_0(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t, \quad g_n(x) = r^n\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

Justifier alors l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$$

c) Soit $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que $c_p(g) = r^{|p|}c_p(f)$.

6) On admet l'injectivité de φ : pour tout $f \in E$, si $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$.

a) Grâce à 5c, déterminer les réels λ tels qu'il existe $f \in E$ non nulle, vérifiant $u(f) = \lambda f$.

b) L'endomorphisme $u : E \to E$ est-il injectif ?

Partie 3 (Produit de convolution, opérateurs associés)
On considère ici l'espace vectoriel complexe noté $\mathcal{C}_{2\pi}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, qui sont 2π-périodiques.
On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme usuelle définie sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}$$

1) Pour f et g dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, on définit $h = f * g$ (dit produit de convolution de f et de g), par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que h ainsi définie est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$.

2) Pour la suite de cette partie, on admettra sans démonstration la relation suivante entre $c_n(f*g)$, $c_n(f)$ et $c_n(g)$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(f*g) = c_n(f)\,c_n(g).$$

a) Montrer que pour tout f et g dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, on a : $f * g = g * f$.

b) Montrer qu'il ne peut pas exister $\varepsilon \in \mathcal{C}_{2\pi}$, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on ait : $f * \varepsilon = f$.

3) Soit ψ donnée dans $\mathcal{C}_{2\pi}$. À toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on associe $\Theta(f) = \psi * f$.

a) Montrer que l'application Θ ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{C}_{2\pi}$.

b) Montrer que $S_\psi = \{c_n(\psi), n \in \mathbb{Z}\}$ est borné, que $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\psi)|$ existe et vérifie $M \leqslant \|\psi\|_\infty$.

c) Justifier que :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\Theta(f)(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\ \mathrm{d}t\|\psi\|_\infty$$

Puis que, en notant $\|f\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\ \mathrm{d}t$,

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \qquad \|\Theta(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1\|\psi\|_\infty$$

d) Montrer que S_ψ est exactement l'ensemble des nombres complexes λ tels qu'il existe f non nulle dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, vérifiant $\Theta(f) = \lambda f$.

e) Caractériser à l'aide de S_ψ l'injectivité de Θ.

FIN DE L'ÉPREUVE