

Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (Centrale PSI 2025)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$, où $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La série $\sum (e^{-x})^n$ est une série géométrique, qui converge si et seulement si $q = e^{-x} \in]-1, 1[$. Ainsi,

$$\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$$

Et, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

- 2) Comme quotient de fonctions usuelles $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$$

- 3) Nous avons :

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\ (1 - e^{-x})^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{1}{x^2} \times \frac{1 - x + x^2/2 + o(x^2)}{(1 - x/2 + x^2/6 + o(x^2))^2}$$

Or $\frac{1}{(1 - u)^2} = 1 + 2u + 3u^2 + o(u^2)$ (ou en développant le carré au préalable puis DL de $\frac{1}{1 - u}$)

Donc, avec $u = x/2 - x^2/6 + o(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - x/2 + x^2/6 + o(x^2))^2} &= 1 + 2\left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right] + 3\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &= 1 + x + x^2\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) + o(x^2) \\ \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} &= \frac{1}{x^2} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 + x + \frac{5}{12}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + x - x^2 + \frac{5}{12}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1) \end{aligned}$$

Donc $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1/12$:

$$\boxed{\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1)}$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^{-nx}$.

La fonction f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_n(x) = -ne^{-nx}$.

- Montrons que $\sum f'_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$:

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Par décroissance de $|f'_n|$,

$$\|f'_n\|_\infty = ne^{-na}$$

De plus, par croissance comparée ($a > 0$), $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \|f'_n\|_\infty = 0$. Donc

$$\|f'_n\|_\infty = o(1/n^2)$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc, par théorème de comparaison, $\sum \|f'_n\|_\infty$ converge. Ainsi,

La série $\sum f'_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

- Théorème de dérivation terme à terme : Soit $I = \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I .
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur I d'après 1).
- La série $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de I d'après ci-dessus.

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, f est $\mathcal{C}^1$ sur I (ce que l'on savait déjà) et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$$

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} &= -\frac{1}{x^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) \\ &= -\frac{1}{x^2} - f'(x) && \text{D'après ci-dessus} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} && \text{D'après 2} \\ &= -\frac{1}{12} + o(1) && \text{D'après 3} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} \right) = -1/12}$$

Le 23 février 1913 Srinivasa Ramanujan écrivit une lettre au mathématicien Godfrey Hardy dans laquelle il présenta une théorie selon laquelle la somme infinie $1 + 2 + \dots + n + \dots$ vaut $-1/12$. S'en est suivi tout un ensemble de recherches sur ce sujet...

Si on cherche à attribuer une valeur finie à la somme divergente (infinie) $\sum_{n=1}^{+\infty} n$, différentes techniques (une seule est présentée ici) font apparaître « $-1/12$ », qui ne semble donc pas être fortuit.

Exercice 2 (CCINP PC 2021)

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

I.1 - Existence de la solution

1) Soit $x > 0$ fixé.

$$|\varphi_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \sim \frac{1}{k^2}$$

Or $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc, par théorème de comparaison, $\sum \varphi_k(x)$ converge absolument donc converge. Conclusion :

La série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$

2) Soit $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \varphi(x+1) + \varphi(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$$

3) Soit $x > 0$ fixé.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(x) = (-1)^k \frac{1}{(x+k)^2}$ avec $\frac{1}{(x+k)^2} \geq 0$. Donc $\sum \varphi_k(x)$ est une série alternée.
- $\left(\frac{1}{(x+k)^2} \right)_k$ est une suite décroissante car $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = 0$.

Donc, d'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum_k \varphi_k(x)$ converge (ce que l'on savait déjà), et le reste d'ordre n est majoré par $|\varphi_{n+1}(x)|$. Ce qui s'écrit

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

4) Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$:

- Méthode 1 : une majoration. La majoration précédente, en $n = 0$, s'écrit :

$$\forall x > 0, \quad \left| \varphi(x) - \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{1}{(x+1)^2}$$

Ainsi, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$, par majoration, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) - \frac{1}{x^2} = 0$.

Puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ entraîne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

- Méthode 2 : théorème de la double limite. Montrons que $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$:
D'après la question 3,

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc, par majoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \varphi - \sum_{k=0}^n \varphi_k \right\|_{\infty} = 0$, et $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

Pour une version plus détaillée de la convergence uniforme, voir la question 7.

Appliquons le théorème de la double limite :

- La série $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ vers φ .
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_k(x) = 0 = \ell_k$.

Donc, d'après le théorème de la double limite, $\sum \ell_k$ converge et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k$

De plus, d'après I.2, φ vérifie la seconde relation de (P). Conclusion :

La fonction φ est une solution de (P)

I.2 - Unicité de la solution

5) Soit $x > 0$ fixé. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: s'écrit $f(x) = -f(x+1) + \frac{1}{x^2}$. C'est vraie par définition de la propriété (P).
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} && \text{d'après } \mathcal{H}_n \\ &= (-1)^{n+1} \left(-f(x+n+2) + \frac{1}{(x+n+1)^2} \right) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} && \text{en appliquant (P) en } x+n+1 \\ &= (-1)^{n+2} f(x+n+2) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geq 0 \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$

6) D'après (P), $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n+1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. Donc, en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité précédente, il vient $f = \varphi$. Ainsi, f solution de (P) implique $f = \varphi$.

Réciproquement, à la question 4 nous avons montré que φ était solution de (P). Conclusion :

La fonction φ est l'unique solution de (P)

Partie II - Etude de la solution du problème (P)

7) Calcul de norme infinie : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Notons, pour tout $x > 0$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(x) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \varphi(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)$$

D'après la question 3,

$$\forall x \geq \varepsilon, \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

Or $x \mapsto \frac{1}{(x+n+1)^2}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc sa borne supérieure est $\frac{1}{(n+1)^2}$ (on pouvait aussi prendre la borne sup sur $[\varepsilon, +\infty[$) et :

$$\forall x > 0, \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

En passant à la borne supérieure sur $[\varepsilon, +\infty[$, il vient

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Convergence uniforme :

Par majoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty = 0$. Comme $R_n = \varphi - S_n$, nous venons de montrer

La série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$

Pour montrer la convergence uniforme en majorant R_n , il n'est pas nécessaire de se placer sur $[\varepsilon, +\infty[$: on peut se placer sur $]0, +\infty[$, et prendre $n \geq 1$: la différence $\varphi - S_n$ fait disparaître le problème de $\varphi_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ non bornée sur $]0, +\infty[$.

On pouvait aussi montrer la convergence normale, en calculant $\|\varphi_k\|_\infty = |\varphi_k(\varepsilon)| = \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$, et en montrant que $\sum \|\varphi_k\|_\infty$ converge (Riemann, ou la convergence simple absolue de la question 1 en $x = \varepsilon$). Puis la convergence normale entraîne la convergence absolue.

- 8) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue sur $]0, +\infty[$.
 • D'après 7, $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[\varepsilon, +\infty[$ de $]0, +\infty[$, donc sur tout segment de $]0, +\infty[$.

Donc, d'après le théorème de continuité,

La fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$

Comme φ est solution de (P),

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \varphi(x+1)$$

Or, d'après ci-dessus, φ est continue en 1 : lorsque $x \rightarrow 0$, $\varphi(x+1) = \varphi(1) + o(1)$.

Donc $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \varphi(1) + o(1)$:

$\varphi(x) \sim \frac{1}{x^2}$

9) Convergence uniforme de $\sum \varphi'_k$: Soit $\varepsilon > 0$, et $n \in \mathbb{N}$ fixé.

La fonction φ_n est dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$\forall x > 0, \quad \varphi'_n(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

Par décroissance de $|\varphi'_n|$ sur $]0, +\infty[$,

$$\|\varphi'_n\|_\infty = \frac{1}{(\varepsilon + n)^3}$$

Ainsi, $\|\varphi'_n\|_\infty \sim \frac{1}{n^3}$.

Comme $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (Riemann, $\alpha = 3 > 1$), par théorème de comparaison, $\sum \|\varphi'_n\|_\infty$ converge :

La série $\sum \varphi'_k$ converge normalement donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$

Dérivée de φ :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- La série $\sum \varphi_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ d'après 1.
- La série $\sum \varphi'_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$.

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions,

$$\varphi \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

10) Le théorème des séries alternées s'applique à la série $\sum \varphi'_n$, comme il s'appliquait à $\sum \varphi_n$ lors de la question 3. Une des conséquences est que le signe du reste est celui du premier terme négligé. En considérant $R_{-1} = \varphi'$ et $\varphi'_{-1+1} = \varphi'_0$, la fonction φ' est du signe de $\varphi'_0(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$.

Donc $\varphi' < 0$ sur $]0, +\infty[$:

$$\text{La fonction } \varphi \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[$$

11) Encadrons φ :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1, +\infty[, \quad & \varphi(x+1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x-1) && \text{décroissance de } \varphi \text{ sur }]0, +\infty[\\ \implies \forall x \in]1, +\infty[, \quad & \varphi(x+1) + \varphi(x) \leq 2\varphi(x) \leq \varphi(x) + \varphi(x-1) \\ \implies \forall x \in]1, +\infty[, \quad & \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2} && (P) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$$

Puis

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad 1 \leq 2x^2\varphi(x) \leq \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2\varphi(x) = 1$:

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{2x^2}$$

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

12) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $f : t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est continue donc continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Étude en 0 : Si $k \geq 1$, $x + k - 1 \geq x > 0$, donc, par croissance comparée,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0, 1]$.

Si $k = 0$, montrons que $f(t) = o(1/t^{1-x/2})$: par croissance comparée, comme $x/2 > 0$,

$$t^{1-x/2} f(t) = t^{x/2} \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Ainsi, $f(t) = o(1/t^{1-x/2})$. Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x/2}} dt$ converge (Riemann en 0, $\alpha = 1 - x/2 < 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\int_0^1 f(t) dt$ converge. Conclusion :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$

Vous avez tout de suite reconnu les intégrales de Bertrand. Pour les reconnaître : lorsque vous avez du t et du $\ln(t)$ qui interviennent (ici, $\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ avec $\alpha = -(x + k - 1)$ et $\beta = -1$).

Vous pouviez aussi effectuer l'intégration par parties de ε à 1, puis passer à la limite : vous prouvez en même temps la convergence, donc l'intégrabilité puisque la fonction est de signe constant (négatif).

Effectuons une intégration par parties :
$$\begin{cases} u = \frac{t^{x+k}}{x+k} & u' = t^{x+k-1} \quad (x+k \neq 0) \\ v = \ln(t) & v' = \frac{1}{t} \end{cases}$$

Comme $x + k > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} uv = 0$ par croissance comparée, et le théorème d'intégration par parties nous dit que les deux intégrales sont de même nature, donc convergente d'après ci-dessus. Et

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt &= \left[\frac{t^{x+k}}{x+k} \ln(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{x+k-1}}{x+k} dt \\ &= -\frac{1}{x+k} \left[\frac{t^{x+k}}{x+k} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{(x+k)^2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = -\frac{1}{(x+k)^2}$$

13) La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est continue sur $]0, 1]$ et, au voisinage de $t = 0$, $\frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} \sim t^{x-1} \ln(t)$.

Or, d'après la question 12, la fonction $t \mapsto t^{x-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ (cas $k = 0$).

Donc, par théorème de comparaison,

La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0, 1]$

Soit $t \in]0, 1]$. La série géométrique $\sum_k (-t)^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \frac{1}{1+t}$$

Ainsi, en multipliant par $t^{x-1} \ln(t)$, il vient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1} \ln(t) = \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$$

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $f_k :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_k(t) = (-1)^k t^{x+k-1} \ln(t)$.

D'après la question 12, $\int_0^1 |f_k(t)| dt = \frac{1}{(x+k)^2} \sim \frac{1}{k^2}$. Or $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$),

donc par théorème de comparaison $\sum \int_0^1 |f_k(t)| dt$ converge.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est continue donc continue par morceaux sur $]0, 1]$.
- $\sum f_k$ converge simplement vers $f : t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ sur $]0, 1]$ d'après ci-dessus, et f est continue.
- La série $\sum \int_0^1 |f_k(t)| dt$ converge

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0, 1]$ et

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(t) dt$$

Or, d'après 12, $\int_0^1 f_k(t) dt = -\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$, et $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$. Par conséquent,

$$\boxed{\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} dt}$$

Exercice 3 (CCINP PC 2021)

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$

1)

$$\begin{aligned} (f_k(x))^2 - x &= \frac{1}{4} \left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)} \right)^2 - x \\ &= \frac{1}{4} \left(f_{k-1}^2(x) + 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}^2(x)} - 4x \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(f_{k-1}^2(x) - 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}^2(x)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)} \right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc $(f_k(x))^2 \geq x$. Comme $x \geq 0$ et $f_k \geq 0$, il vient

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k(x) \geq \sqrt{x}}$$

2) Si $x = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_{k+1}(0) = \frac{1}{2} f_k(0)$: la suite est géométrique et décroissante.

Et si $x \neq 0$? Que faire ? C'est la question 2. Pas d'idées... la question 1 semblait sortie de nulle part : essayons de l'utiliser.

Si $x > 0$, d'après 1, $f_k(x) \geq \sqrt{x} > 0$. En passant à l'inverse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_k(x)} &\leq \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \Rightarrow \frac{x}{f_k(x)} &\leq \sqrt{x} \leq f_k(x) && \text{toujours d'après 1} \\ \Rightarrow f_{k+1}(x) = \frac{1}{2} \left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)} \right) &\leq \frac{1}{2} (f_k(x) + f_k(x)) = f_k(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

La suite $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante

- 3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. La suite $(f_k(x))_k$ est décroissante (d'après 2) minorée par $\sqrt{x}$ (d'après 1), donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$ sa limite.

Si $x > 0$, la minoration $f(x) \geq \sqrt{x}$ nous donne $f(x) > 0$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, il vient

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) + \frac{x}{f(x)} \right)$$

D'où $f(x)^2 = x$, puis $f(x) = \sqrt{x}$.

Si $x = 0$, La suite géométrique $(f_k(0))$ de raison 2 converge vers $0 = \sqrt{0}$.

Finalement,

$(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

I.2 - Majoration de l'erreur

- 4) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \right) &= \frac{1}{2} \left(f_k(x) - \sqrt{x} - \sqrt{x} + \frac{x}{f_k(x)} \right) \quad (\text{développer plutôt que factoriser}) \\ &= -\sqrt{x} + \frac{1}{2} \left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)} \right) \\ &= f_{k+1}(x) - \sqrt{x} \end{aligned}$$

Il est rare d'obtenir une relation de récurrence (lien entre f_k et f_{k+1} , plus généralement entre la valeur au rang k et celle au rang $k+1$) par récurrence. Cette relation, par contre, servira pour faire des récurrence dans peu de temps

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \right)$$

- 5) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad |f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}$$

est vraie pour tout $k \geq 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: Comme $f_0 = 1$, $f_1(x) = \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{1})$, donc $\div \mathcal{H}_1$ est vraie.

- $\mathcal{H}_k \implies \mathcal{H}_{k+1}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. Comme $f_k(x) \geq \sqrt{x}$ (et $f_k > 0$), $\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \leq 1$.

$$\begin{aligned}
 |f_{k+1}(x) - \sqrt{x}| &= \frac{|f_k(x) - \sqrt{x}|}{2} \left| 1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \right| && \text{d'après 4} \\
 &\leq \frac{1+x}{2^{k+1}} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \right) && \mathcal{H}_k \\
 &\leq \frac{1+x}{2^{k+1}} && \text{car } 1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \leq 1
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\forall k \geq 1 \quad |f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}$

FIN DE L'ÉPREUVE