

Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (CCINP MP 2024)

Nommez les objets : « soit $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ », ou « soit $g(t) = e^{-x\sqrt{t}}$ ».

Pour la comparaison série/intégrale, gardez « g » le plus longtemps possible : c'est plus léger, et c'est toujours la même rédaction. L'expression de g ne sert à rien.

1) Convergence simple : Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

- Si $x = 0$, $f_n(0) = 1$ et $\sum f_n(0)$ diverge grossièrement.
- Si $x < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\sum f_n(x)$ diverge, aussi, grossièrement.
- Si $x > 0$, par croissance comparée,

$$n^2 f_n(x) = (\sqrt{n})^4 e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison des séries positives, $\sum f_n(x)$ converge.

Conclusion : $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et diverge ailleurs.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$$

2) Convergence normale : Soit $a > 0$. Montrons que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$ (exponentielle est croissante), donc

$$\|f_n\|_\infty = f_n(a) = e^{-a\sqrt{n}}$$

De plus, d'après 1, $\sum f_n(a)$ converge.

Donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Conclusion

$$\sum f_n \text{ converge normalement sur } [a, +\infty[$$

Théorème de continuité : Soit $I = \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I .
- D'après ci-dessus, $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de I vers f .

Donc, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions,

$$f \text{ est continue sur } \mathcal{D}_f$$

3) Théorème de la double limite :

- D'après 2, $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément vers f sur $^1[1, +\infty[$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 = \ell_n$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1 = \ell_0$.

D'après le théorème de la double limite, $\sum \ell_n$ converge, f admet une limite en $+\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$$

4) Effectuons une comparaison série / intégrale. Soit $x > 0$ fixé. Posons, sur $\mathbb{R}_+$,

$$g : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$$

Comme composée de $t \mapsto \sqrt{t}$ croissante sur $\mathbb{R}_+$ et de $u \mapsto e^{-xu}$ décroissante sur $\mathbb{R}$, la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall t \in [n, n+1], \quad n \leq t \leq n+1$$

$$\Rightarrow \forall t \in [n, n+1], \quad g(n+1) \leq g(t) \leq g(n) \quad \text{Décroissance de } g$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} g(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} g(t) dt \leq \int_n^{n+1} g(n) dt \quad \text{Croissance de l'intégrale}$$

$$\Rightarrow \quad g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t) dt \leq g(n)$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. En sommant entre $n = 0$ et $n = N$, il vient

$$\sum_{n=0}^N g(n+1) = \sum_{n=1}^{N+1} g(n) \leq \int_0^{N+1} g(t) dt \leq \sum_{n=0}^N g(n)$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = e^{-x\sqrt{n}} = f_n(x)$. Donc $\sum g(n)$ converge vers $f(x)$.

La fonction g étant continue, positive, décroissante, par théorème de comparaison série/intégrale,

$\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge. *Toujours étudier l'existence avant d'écrire une limite, ou une intégrale généralisée.*

On peut aussi étudier directement la convergence de l'intégrale, c'est quasiment instantané.

Ainsi, en prenant la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, il vient

$$f(x) - 1 \leq \int_0^{+\infty} g(t) dt \leq f(x)$$

L'inégalité de gauche s'écrit aussi $f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} g(t) dt$ Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt}$$

5) Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{t} : t \mapsto \sqrt{t}$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.

Comme $t = u^2$, $dt = 2u du$. D'après le théorème de changement de variable, $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-xu} 2u du$ sont de même nature, convergentes d'après la question précédente. De plus,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} u e^{-xu} du$$

1. Tout intervalle dont $+\infty$ est le bord convient. Vous pouvez prendre $[2024, +\infty[$ si vous voulez.

Effectuons une intégration par parties. Posons

$$\begin{cases} v = u & v' = 1 \\ w = -\frac{1}{x}e^{-xu} & w' = e^{-xu} \end{cases}$$

Par croissance comparée, $\lim_{u \rightarrow +\infty} vw = 0$. D'après le théorème d'intégration par parties, $\int_0^{+\infty} ue^{-xu} du$ et $-\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xu} du$ sont donc de même nature – convergentes. De plus,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} ue^{-xu} du &= \left[-\frac{u}{x} e^{-xu} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xu} du \\ &= 0 + \frac{1}{x} \left[-\frac{1}{x} e^{-xu} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x^2}$$

On vérifie : on calculait l'intégrale d'une fonction positive, a-t-on obtenu quelque chose de positif ? Une erreur de signe est vite arrivée, et facilement rectifiable.

L'encadrement de la question précédente s'écrit alors

$$\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2}$$

Donc, comme $x^2 > 0$, $1 \leq f(x) \times \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{2} + 1$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} + 1 = 1$, donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times \frac{x^2}{2} = 1$, et

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2}}$$

Exercice 2 (d'après ESSEC 2016)

Partie 1 (Étude de la fonction φ)

$$u_n(x) = \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

1) Comme $x \in \mathcal{D}$, $x \notin \mathbb{Z}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - x^2 \neq 0$: $u_n(x)$ existe².

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $|u_n(x)| \sim \frac{2x}{n^2}$ (pour³ $x \neq 0$).

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\sum u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

Si $x = 0$, la série est de terme général nul, donc converge.

Conclusion : La série de terme général $u_n(x)$ est convergente.

On vient d'étudier la convergence simple de $\sum u_n$.

2) Imparité et périodicité de φ .

2. Souvenez-vous : une barre de fraction $\implies$ réflexe : le dénominateur peut-il s'annuler ?
3. Même réflexe, mais avec des $\sim$

a) Soit $x \in \mathcal{D}$. Comme $x \notin \mathbb{Z}$, $-x \notin \mathbb{Z}$ non plus (par l'absurde : $\mathbb{Z}$ est stable par passage à l'opposé).

$$\varphi(-x) = \frac{1}{-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{n^2 - (-x)^2} = -\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2x}{n^2 - x^2} = -\varphi(x)$$

Ainsi, La fonction φ est impaire

b) C'est une décomposition en éléments simples, mais comme on nous la donne, autant utiliser le résultat.

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{n+x - (n-x)}{(n-x)(n+x)} = \frac{2x}{n^2 - x^2} = u_n(x)$$

c) Pour $x \in \mathcal{D}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente,

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n-x} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x}$$

d) Le point délicat : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+x}$, tout comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n-x}$, diverge. Donc on ne peut pas couper en deux sommes infinies, et faire deux changements d'indices. Pour ne prendre aucun risque, il faut revenir à des sommes finies, et passer à la limite à la fin.

Plus généralement, il est souvent sage, lorsqu'on manipule des sommes infinies, de commencer par manipuler la somme jusqu'à N , puis prendre la limite : dissocier les deux opérations, somme et limite. Questions 1.2d (ici) et 2.4a.

Comme $x+1 \in \mathbb{Z}$ entraîne $x \in \mathbb{Z}$, par contraposition, $x \in \mathcal{D}$ entraîne $x+1 \in \mathcal{D}$.

Soit $x \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \varphi_N(x+1) &= \frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n-1-x} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x+1} \\ &= -\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n-x} \right) + \frac{1}{1+x} + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n+x} && \text{(Avec des pointillés tout est clair)} \\ &= -\frac{1}{-x} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n-x} + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n+x} \\ &= \varphi_N(x) + \frac{1}{N-x} + \frac{1}{N+x} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N-x} = 0$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+x} = 0$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \varphi_N(x) = \varphi(x)$, en passant à la limite dans l'égalité obtenue :

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D} \quad \varphi(x+1) = \varphi(x)}$$

Donc φ est périodique de période 1.

3) Continuité de φ .

a) Soit $n \geq 2$. La fonction $x \mapsto \frac{2x}{n^2 - x^2}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-n, n\}$, donc en particulier sur $[0, 1]$.

$$\forall x \in [0, 1], \quad u'_n(x) = \frac{2(n^2 - x^2) + 4x^2}{(n^2 - x^2)^2} = 2 \frac{n^2 + x^2}{(n^2 - x^2)^2} > 0$$

x	0	1
$u'_n(x)$	+	
u_n	0	$\frac{2}{n^2 - 1}$

b) Par parité, pour $n \geq 2$,

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |u_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |u_n(x)|$$

D'après le tableau de variations de la question précédente, pour $n \geq 2$

$$\|u_n\|_\infty = u_n(1) = \frac{2}{n^2 - 1}$$

Ainsi $\|u_n\|_\infty \sim \frac{2}{n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par équivalence, $\sum_{n \geq 2} \|u_n\|_\infty$ converge.

Conclusion : La série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$

c) La série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$, donc converge simplement sur cet intervalle :

sa somme $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ est définie pour tout $x \in [-1, 1]$.

Montrons la continuité de g sur $I = [-1, 1]$:

- La série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge normalement sur I d'après 3b, donc converge uniformément sur cet intervalle.
- Pour tout $n \geq 2$, u_n est continue sur I .

Ainsi, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, sa somme g est continue sur I .
En résumé :

La fonction g est définie et continue sur $[-1, 1]$

d) Soit $x \in]0, 1[$, par définition de φ et de g ,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1 - x^2} - g(x)$$

On vient donc de transformer notre somme infinie de fonctions, φ , en une somme finie : tout devient plus simple.

e) D'après 3d, φ est une somme finie de fonctions définies et continues sur $]0, 1[$, donc φ est continue sur $]0, 1[$. De plus, d'après 2d, φ est 1-périodique, donc

La fonction φ est continue sur $\mathcal{D}$

4) Étude de φ au voisinage de 0 et de 1.

a) D'après 3c, g , définie sur $[-1, 1]$, est continue en 0, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2 \times 0}{n^2 - 0^2} = 0$$

Attention, la première égalité est exactement la continuité de g , qui n'est pas automatique — ici elle a été obtenue par la convergence uniforme. On se place sur $[-1, 1]$ pour avoir la limite en 0, et non pas uniquement la limite en 0^+ .

D'après 3d, pour tout $x \in]0, 1[$ $\varphi(x) - \frac{1}{x} = -\frac{2x}{1 - x^2} - g(x)$. Cette formule reste vraie sur $] -1, 0[$, ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} \right) = 0$$

b) D'après 3a, $\varphi(x) - \frac{1}{x} = o(1)$. Donc

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} + o(1)$$

Ceci s'appelle un développement asymptotique – c'est une généralisation des développements limités, que vous pratiquez déjà lorsqu'on fait « un DL en $\frac{1}{n}$ ». Ici, nous obtenons d'ailleurs un résultat plus fort que l'équivalent : l'équivalent nous dit juste $\varphi(x) = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.

$$\boxed{\varphi(x) \sim \frac{1}{x}}$$

c) Étude ailleurs qu'en 0 (ou $\pm\infty$) ? poser $x = a + h$.

Posons $x = 1 + h$. Par 1-périodicité de φ et d'après 4b, $\varphi(1 + h) = \varphi(h) \sim \frac{1}{h}$, donc

$$\boxed{\varphi(x) = \varphi(x - 1) \sim \frac{1}{x - 1}}$$

Partie 2 (Étude de l'opérateur T)

1) Si $x \in [0, 1]$, $\frac{x}{2} \in [0, 1]$ et $\frac{x+1}{2} \in [0, 1]$ aussi : T est bien défini.

- Montrons que T est linéaire :

Je rappelle la méthode : 2 temps. D'abord écrire avec les notations du cours :

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $(x, y) \in E^2$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Puis identifier E , x , y , et traduire dans les notations de l'énoncé.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, f et $g \in E$.

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \quad T(\lambda f + g)(x) &= (\lambda f + g)\left(\frac{x}{2}\right) + (\lambda f + g)\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \lambda f\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda f\left(\frac{x+1}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \lambda T(f)(x) + T(g)(x) \end{aligned}$$

Donc $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$: T est linéaire.

- Montrons que $T : E \rightarrow E$: Soit $f \in E$.

La fonction $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = T(f)(x)$ est continue sur $[0, 1]$ comme composée de fonctions continues sur $[0, 1]$.

Donc $T(f) \in E$.

Conclusion :

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E}$$

2) Étude du noyau de l'endomorphisme $(2 \text{id}_E - T)$.

a) Par définition du noyau,

$$\begin{aligned} f \in E_2 &\implies (2 \text{id}_E - T)(f) = 0 \\ &\implies 2f - T(f) = 0 \\ &\implies T(f) = 2f \end{aligned}$$

Et réciproquement, $T(f) = 2f \implies f \in E_2$. En conclusion,

$$\boxed{f \in E_2 \iff \forall x \in [0, 1], f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)}$$

b) En considérant $f = 1$, la fonction constante égale à 1,

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 1 + 1 = 2 = 2f(x)$$

Ainsi, d'après 2a, $f = 1 \in E_2$ et

$$E_2 \neq \{0\}$$

c) Soit $f \in E_2$ fixé.

La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes :

$$\text{Il existe } x_0 \in [0, 1] \text{ et } x_1 \in [0, 1] \text{ tels que } f(x_0) = m = \min_{x \in [0, 1]} f(x) \text{ et } f(x_1) = M = \max_{x \in [0, 1]} f(x)$$

d) Supposons $f\left(\frac{x_0}{2}\right) \neq m$.

Comme m est le minimum de f , $f\left(\frac{x_0}{2}\right) > m$. De même, $f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \geq m$. Ainsi,

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) > m + m = 2m$$

De plus, $f \in E_2$:

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2f(x_0) = 2m$$

Ce qui est absurde, donc

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$$

e) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: est vraie par définition de x_0 .

- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. En posant $\tilde{x}_0 = \frac{x_0}{2^n}$, $\mathcal{H}_n$ s'écrit $f(\tilde{x}_0) = m$, et le résultat de la question 2d appliqué à $\tilde{x}_0$ s'écrit

$$f\left(\frac{\tilde{x}_0}{2}\right) = m$$

Or $\frac{\tilde{x}_0}{2} = \frac{x_0}{2^{n+1}}$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geq 0 \quad f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$

f) La fonction f est continue en 0, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_0}{2^n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f(0)$.

Or, d'après 2e, la suite $\left(f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right)_n$ est constante égale à m . Donc

$$f(0) = m$$

g) On peut appliquer le résultat trouvé en 2f à la fonction $-f$ de minimum $-M$, on trouve alors $-f(0) = -M$, donc $f(0) = M$. Ou bien on peut refaire le raisonnement.

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = M$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: est vraie par définition de x_1 .
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et $\mathcal{H}_{n+1}$ fausse. Comme $f \in E_2$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1}{2^{n+1}}\right) + f\left(\frac{x_1/2^n + 1}{2}\right) &> M + M = 2M \\ &= 2f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = 2M \end{aligned}$$

Ce qui est absurde. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geq 0 \quad f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = M$

Par continuité de f en 0, de même qu'en 2f, $f(0) = M$. Conclusion :

$$m = M$$

h) *Savoir détecter les questions faciles : tout le monde sait faire cette question.*

Par définition du maximum M et du minimum m de f sur $[0, 1]$,

$$\forall x \in [0, 1] \quad m \leq f(x) \leq M$$

Donc si $m = M$, $f(x) = m$ pour tout x , et

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est constante.}}$$

i) Montrons l'égalité par double inclusion.

$\subset$ D'après 2h,

$$f \in E_2 \implies f \text{ est constante}$$

Donc $E_2 \subset \{f \in E \mid f \text{ constante}\}$.

$\supset$ On a en fait déjà montré cette inclusion en 2b, car $1 \in E_2$ et E_2 sous-espace vectoriel entraîne $\text{Vect}(1) \subset E_2$.

$$\begin{aligned} f = m \text{ constante} &\implies \forall x \in [0, 1], \quad f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2m = 2f(x) \\ &\implies f \in E_2 \end{aligned} \tag{2a}$$

Donc $\{f \in E \mid f \text{ constante}\} \subset E_2$.

Conclusion :

$$\boxed{E_2 = \{f \in E \mid f \text{ constante}\}}$$

3) Étude de la fonction cot.

a) La fonction cot est définie dès que le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire pour $\pi x \notin \pi\mathbb{Z}$, ce qui signifie $x \in \mathcal{D}$.

De plus, la fonction cot est alors continue comme quotient d'une fonction continue par une autre fonction continue, qui ne s'annule jamais.

La fonction cot est le quotient d'une fonction paire par une fonction impaire, elle est donc impaire.

$$\text{De plus, } \forall x \in \mathcal{D}, \quad \cot(x+1) = \pi \frac{\cos(\pi x + \pi)}{\sin(\pi x + \pi)} = \pi \frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = \cot(x).$$

$$\boxed{\text{La fonction cot est définie et continue sur } \mathcal{D}, \text{ elle est impaire et périodique de période } 1}$$

b) *Un DL ! Autre question faisable perdue dans cette partie. Surtout : prendre son temps, ne pas sauter d'étape.*

Les développements limités de sin et cos nous donnent

$$\cos(\pi x) = 1 - \frac{(\pi x)^2}{2!} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \sin(\pi x) = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + o(x^3)$$

D'où

$$\begin{aligned} \cot(x) &= \pi \frac{1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + o(x^2)}{\pi x - \frac{\pi^3}{6}x^3 + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + o(x^2)\right) \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{6}x^2 + o(x^2)} \quad \left(\text{pour faire apparaître } \frac{1}{1+u}\right) \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + o(x^2)\right) \left(1 + \frac{\pi^2}{6}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + \frac{\pi^2}{6}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{x} - \frac{\pi^2}{3}x + o(x)} \end{aligned}$$

Il faut savoir faire un DL. Ce n'est pas négociable.

c) Posons $x = 1 + h$. Comme d'après 3a cot est 1-périodique,

$$\boxed{\cot(1+h) = \cot(h) = \frac{1}{h} - \frac{\pi^2}{3}h + o(h)}$$

d) Soit $x \in \mathcal{D}$. Si $\frac{x}{2} = k \in \mathbb{Z}$, alors $x = 2k \in 2\mathbb{Z}$ est un entier (pair), ce qui est absurde.

De même, si $\frac{x+1}{2} = k \in \mathbb{Z}$, alors $x = 2k - 1 \in -1 + 2\mathbb{Z}$ est un entier, ce qui est absurde.

$$\text{Conclusion : } \boxed{\frac{x}{2} \in \mathcal{D} \text{ et } \frac{x+1}{2} \in \mathcal{D}}$$

e) Soit $x \in \mathcal{D}$. D'après ci-dessus, $\frac{x}{2} \in \mathcal{D}$ et $\frac{x+1}{2} \in \mathcal{D}$, donc la formule à montrer est bien définie.

$$\cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = \pi \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = \pi \frac{-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \pi \frac{-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\ &= \pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \quad (\text{Formules de trigo :}) \\ &= \pi \frac{2 \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \quad (\text{savoir qu'elles existent}) \\ &= 2 \cot(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}, \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2 \cot(x)}$$

4) Calcul de φ .

a) Soit $x \in \mathcal{D}$ fixé. D'après 1.2b, on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$

Comme $x/2$ et $(x+1)/2 \in \mathcal{D}$, il vient

Dans cette question, les pointillés vous sauvent, puis il faut savoir le rédiger avec des $\sum$.

$$\begin{aligned}
 \varphi_N\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n-x} - \frac{1}{2n+x} \right) \right) && \text{On reconnaît } \frac{1}{p-x} - \frac{1}{p+x} : \text{ bien !} \\
 \varphi_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{2}{x+1} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{2}{2n-x-1} - \frac{2}{2n+x+1} \right) \\
 &= \frac{2}{x+1} - \left(\sum_{n=1}^N \frac{2}{(2n-1)-x} - \sum_{n=1}^N \frac{2}{(2n+1)+x} \right) && \text{Décalons : on veut } \frac{1}{p-x} - \frac{1}{p+x} \\
 &= \frac{2}{x+1} - \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2}{(2n+1)-x} - \sum_{n=1}^N \frac{2}{(2n+1)+x} \right) \\
 &= \frac{2}{x+1} - \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2}{(2n+1)-x} - \frac{2}{(2N+1)+x} \right) + \frac{2}{2N+1+x} - \frac{2}{x+1} \\
 &= -2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(2n+1)-x} - \frac{1}{(2n+1)+x} \right) + \frac{2}{2N+1+x}
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \varphi_N\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= 2 \left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n-x} - \frac{1}{2n+x} \right) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2n+1-x} - \frac{1}{2n+1+x} \right) + \frac{2}{2N+1+x} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{1}{x} - \sum_{p=0}^{2N} \left(\frac{1}{p-x} - \frac{1}{p+x} \right) + \frac{2}{2N+1+x} \right) \\
 &= 2\varphi_{2N}(x) + \frac{2}{2N+1+x}
 \end{aligned}$$

Toujours les mêmes idées :

- utiliser des sommes finies, pour la sécurité des calculs ;
- écrire les sommes avec des pointillés – bien clairement, en prenant la place qu'il faut sur la feuille de brouillon – pour comprendre ce qui se passe.

Ainsi, en passant à la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$,

$$\boxed{\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)}$$

b) La fonction $h = \varphi - \cot$ est continue sur $]0, 1[$ comme différence de fonctions continues sur $]0, 1[$.

De plus, d'après 1.4a et 2.3b, au voisinage de $x = 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} + o(1) \quad \text{et} \quad \cot(x) = \frac{1}{x} + o(1)$$

Donc $h(x) = o(1)$: c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$. Donc h se prolonge par continuité en 0 par

$$\boxed{h(0) = 0}$$

De même en $x = 1$, les développements asymptotiques sont

$$\varphi(1+h) = \frac{1}{h} + o(1) \quad \text{et} \quad \cot(1+h) = \frac{1}{h} + o(1)$$

Donc h est prolongeable par continuité en $x = 1$ par $h(1) = 0$.

Comme la limite obtenue en 0 est une vraie limite en 0 et non en 0^+ , on pouvait aussi utiliser la 1-périodicité pour en déduire la limite en 1, sans refaire les calculs.

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction } h = \varphi - \cot \text{ se prolonge par continuité sur } [0, 1]}$

c) Pour tout $x \in]0, 1[$, d'après respectivement 2.4a et 2.3e,

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x) \quad \text{et} \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x)$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0, 1[, \quad h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2h(x).$$

Par continuité de h en 0 et en 1, cet égalité reste vraie pour $x = 0$ et $x = 1$.

Par conséquent, h , qui est continue sur $[0, 1]$, appartient à E_2 :

$$\boxed{h \in E_2}$$

La continuité de h sur le segment $[0, 1]$ – et le fait qu'elle vérifie l'équation sur $[0, 1]$ – est centrale. En effet, $\cot$ vérifie aussi l'équation, mais seulement sur $]0, 1[$: c'est ce qui lui permet de ne pas être constante, contrairement aux fonctions de E_2 . Donc, non seulement le fait d'être sur un segment est au coeur de la preuve de la question 2.2c, mais, en plus, en supprimant cette hypothèse, une fonction qui vérifie l'équation de E_2 n'est plus forcément constante.

d) D'après la question 2i, E_2 est l'ensemble des fonctions constantes. Donc h , qui appartient à E_2 d'après 4c, est une fonction constante. Or d'après le calcul effectué au 4b, $h(0) = 0$. Donc $h = 0$. C'est-à-dire $\forall x \in]0, 1[, \varphi(x) = \cot(x)$.

De plus, d'après 1.2d et 2.3a, ce sont des fonctions 1-périodique. Donc par translation de 1 sur la variable x , l'égalité est vraie sur $\mathcal{D}$. Ainsi,

$$\boxed{\varphi = \cot}$$

5) Application.

a) D'après 2.3b, $\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{\pi^2}{3}x + o(x)$. Donc

$$\frac{1 - x \cot(x)}{2x^2} = \frac{1 - (1 - \frac{\pi^2}{3}x^2 + o(x^2))}{2x^2} = \frac{\pi^2}{6} + o(1)$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \cot(x)}{2x^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Un calcul de limite d'une fonction composée de fonctions usuelles : on peut généralement en venir à bout avec un DL.

b) Notons $f_n(x) = \frac{1}{n^2 - x^2}$ pour tout $n \geq 1$ et $x \in I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

La fonction f_n est définie et continue sur I . De plus elle a pour tableau de variations

x	$-1/2$	0	$1/2$
$f'_n(x)$	$-$	0	$+$
f_n	$f_n(1/2)$	$\searrow$ $1/n^2$ $\nearrow$	$f_n(1/2)$

$$\forall x \in I \quad f'_n(x) = \frac{2x}{(n^2 - x^2)^2}$$

Donc $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n^2 - 1/4}$. Or $\|f_n\|_\infty \sim \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Ainsi, par comparaison, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur I .

Comme les f_n sont continues, c'est aussi le cas de la fonction somme :

La fonction S est définie et continue sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

c) La fonction S est en particulier continue en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = S(0)$. Ce qui s'écrit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

d) En remplaçant φ par son expression, on a

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \frac{1 - x\varphi(x)}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} \left(1 - 1 + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \right) = S(x)$$

D'après 4d, $\cot = \varphi$. Donc 5a s'écrit

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x\varphi(x)}{2x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Or d'après 5c, $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie 3 (Développement eulérien de la fonction sinus)

1) Les conditions imposées au couple (n, x) entraînent $\frac{x^2}{n^2} < 1$, donc

$$1 - \frac{x^2}{n^2} > 0$$

Ainsi, v_n est bien définie sur $I = [0, 1]$ ($I = [0, 1[$ si $n = 1$). De plus elle est dérivable comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in I \quad v'_n(x) = \frac{-2x/n^2}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = -u_n(x)$$

Prendre son temps, $\ln(u)' = \frac{u'}{u}$ avec $u = \dots$ donc $u' = \dots$

2) Soit $x \in [0, 1]$. Appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur $[0, x]$.

- D'après 1.3c, la série $\sum u_n$ converge uniformément vers g sur $I = [0, 1]$ donc sur $[0, x]$.
- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les u_n sont continues sur $[0, x]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\forall x \in [0, 1], \quad \int_0^x g(t) dt = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^x u_n(t) dt$$

Or $v'_n = -u_n$ donc $\int_0^x u_n(t) dt = [-v_n(t)]_0^x = -v_n(x)$ car $v_n(0) = 0$. Ainsi

$$\forall x \in [0, 1], \quad \int_0^x g(t) dt = - \sum_{n=2}^{+\infty} v_n(x)$$

3) a) D'après 1.3d, pour tout $x \in]0, 1[$, $\varphi(x) - \frac{1}{x} = -\frac{2x}{1-x^2} - g(x)$.

La fonction $x \mapsto -\frac{2x}{1-x^2} - g(x)$ est continue sur $[0, x]$ (car $x < 1$), et d'après la question 2,

$$\int_0^x -\frac{2t}{1-t^2} - g(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$

En considérant l'intégrale précédente sur $]0, x]$, on peut remplacer $-\frac{2t}{1-t^2} - g(t)$ par $\varphi(t) - \frac{1}{t}$: l'intégrale existe (fonction prolongeable par continuité en 0) et

$$\boxed{\int_0^x \varphi(t) - \frac{1}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \beta(x)}$$

b) D'après la question 4 de la partie 2,

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \varphi(x) = \cot(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

Pour $x \in]0, 1[$, une primitive de $\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$ est $\ln |\sin(\pi x)| = \ln(\sin(\pi x))$ (on reconnaît la forme u'/u , avec $u > 0$). De plus, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, 1[$ est $\ln$. Ainsi, pour $x \in]0, 1[$

$$\int_0^x \varphi(t) - \frac{1}{t} dt = \ln(\sin(\pi x)) - \ln x + K = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right) + K$$

Avec la constante K telle que le membre de droite soit nul lui aussi lorsque $x \rightarrow 0$.

Or en 0, $\frac{\sin(\pi x)}{x} \sim \pi$, donc par continuité de $\ln$ en π ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right) = \ln(\pi)$$

Par conséquent $K = -\ln \pi$. Finalement,

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, \quad \beta(x) = \int_0^x \varphi(t) - \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)}$$

4) a) Soit $x \in [0, 1[$. Pour tout $n \geq 1$, $\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) > 0$, par conséquent

$$\ln(P_N(x)) = \ln\left(\pi x \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right) = \ln(\pi x) + \sum_{n=1}^N \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

La série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ converge et elle a pour somme $\beta(x) = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$ d'après le résultat de la question 3b. Donc, en passant à la limite dans l'égalité précédente,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(P_N(x)) = \ln(\pi x) + \beta(x) = \ln(\sin(\pi x))$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$\boxed{\text{La suite } (P_N(x))_{N \geq 1} \text{ est convergente de limite } P(x) = \pi x e^{\beta(x)} = \sin(\pi x)}$$

b) Pour $n > |x|$, on a $\frac{x^2}{n^2} < 1$, donc l'expression $\ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ est bien définie.

De plus, à x **non nul** fixé, $\ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x^2}{n^2}$.

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), ainsi, d'après le théorème d'équivalence des

séries à termes positifs, la série $\sum_{n > |x|} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ converge.

Autrement dit, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{N \geq n > |x|} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \exp \left(\sum_{N \geq n > |x|} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \right)$ existe dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{N \geq n > |x|} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \text{ existe et appartient à } \mathbb{R}$$

Or, pour $N > |x|$, $P_N(x) = \pi x \underbrace{\prod_{1 \leq n \leq |x|} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)}_{= \text{constante}/N} \prod_{N \geq n > |x|} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$, donc on en déduit que

La suite $(P_N(x))_{N \geq 1}$ converge

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-N, N[$, on a

$$\begin{aligned} P_N(x) &= \pi x \prod_{n=1}^N \left(\frac{n^2 - x^2}{n^2} \right) & \text{Or } n^2 - x^2 &= (n-x)(n+x) \\ &= \pi x \prod_{n=1}^N (n-x) \prod_{n=1}^N (n+x) \prod_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Donc, en remarquant que $x \neq N$ donc $N-x \neq 0$,

$$\begin{aligned} P_N(x+1) &= \pi(x+1) \prod_{n=1}^N (n-x-1) \prod_{n=1}^N (n+x+1) \prod_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \\ &= \pi(x+1) \prod_{k=0}^{N-1} (k-x) \prod_{p=2}^{N+1} (p+x) \prod_{n=1}^N \frac{1}{n^2} & (k=n-1, p=n+1) \\ &= \pi \left(\frac{-x}{N-x} \prod_{k=1}^N (k-x) \right) \left((x+1)(N+1+x) \prod_{p=2}^N (p+x) \right) \prod_{n=1}^N \frac{1}{n^2} & (\text{but : } P_N(x)) \\ &= -\frac{(N+1+x)}{N-x} \pi x \prod_{n=1}^N (n-x) \prod_{n=1}^N (n+x) \prod_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \\ &= -\frac{(N+1+x)}{N-x} P_N(x) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$P_N(x+1) = -\frac{N+1+x}{N-x} P_N(x)$$

- d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, on a $P(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P_N(x)$ et $P(x+1) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P_N(x+1)$. Puis, $\lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{N+1+x}{N-x} = -1$, donc en passant à la limite si $N \rightarrow +\infty$ dans l'égalité de la question précédente (on a le droit, car si $N \rightarrow +\infty$, on peut supposer $N > |x|$), on obtient

$$\boxed{P(x+1) = -P(x)}$$

- e) Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en appliquant la relation de la question précédente à $x+1$ au lieu de x , on a $P(x+2) = -P(x+1)$. Et la relation de la question précédente s'applique encore et donne

$$P(x+2) = -(-P(x)) = P(x)$$

C'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc

$$\boxed{P \text{ est 2-périodique sur } \mathbb{R}}$$

- f) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_N(-x) = \pi(-x) \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{(-x)^2}{n^2}\right) = -\pi x \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = -P_N(x)$$

En passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on en déduit $P(-x) = -P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (autrement dit, P est impaire).

Puis, la question 4a donne $P(x) = \sin(\pi x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Par imparité, on a alors

$$\forall x \in [-1, 0], \quad P(x) = -P(-x) = -\sin(\pi(-x)) = -(-\sin(\pi x)) = \sin(\pi x)$$

(l'avant dernière égalité provenant de l'imparité de $\sin$).

Donc $P(x) = \sin(\pi x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Comme P et $x \mapsto \sin(\pi x)$ sont 2-périodiques, on conclue :

$$\boxed{P(x) = \sin(\pi x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE