Épreuve de Mathématiques 3

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
Ne pas utiliser de correcteur.
Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Dans tout le problème, $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur le segmet $[0,1]$ et à valeurs réelles. Sous réserve d'existence, notons

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide de la fonction φ, une expression de la fonction $\dfrac{\cos}{\sin}$ comme somme de série.
Plus précisément, dans la partie 1, on étudie les premières propriétés de la fonction φ ; dans la seconde partie, on introduit et on étudie l'opérateur T défini sur E par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \qquad T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

On en déduit une expression de la fonction $\dfrac{\cos}{\sin}$.

Partie 1 (Étude de la fonction φ)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel qui n'est pas un entier relatif, notons

$$u_n(x) = \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

Dans toute la suite, on note $\mathscr{D}$ l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs : $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

1) Soit $x \in \mathscr{D}$ fixé. Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente.
La fonction φ est donc définie sur $\mathscr{D}$.

2) Imparité et periodicité de φ.

a) Montrer que φ est impaire. On vérifiera que $-x$ est bien dans l'ensemble de définition.

b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathscr{D}$, $u_n(x) = \dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}$

c) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad \varphi_N(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

Exprimer φ_N à l'aide de deux sommes.

d) Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}$, $\varphi(x+1) = \varphi(x)$. En déduire une période de la fonction φ.

3) Continuité de φ.

a) Pour $n \geqslant 2$, on note que u_n est définie sur $[-1,1]$. Étudier les variations de u_n sur $[0,1]$.

b) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ converge normalement sur $[-1,1]$. La somme commence à $n=2$.

c) Pour tout $x \in [-1,1]$, notons $g(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$. Montrer que g est définie et continue sur $[-1,1]$.

d) Pour $x \in]0,1[$, écrire $\varphi(x)$ à l'aide de $g(x)$ et de fonctions usuelles.

e) En déduire que φ est continue sur $]0,1[$, puis sur $\mathscr{D}$.

4) Étude de φ au voisinage de 0 et de 1.

a) À l'aide du résultat de la question 3d, montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\varphi(x) - \dfrac{1}{x}\right) = 0$. Justifier avec soin.

b) En déduire un équivalent de $\varphi(x)$ en 0.

c) Obtenir un équivalent de φ au voisinage de $x = 1$. <u>Indication</u> : *φ est 1-périodique.*

Partie 2 (Étude de l'opérateur T)

Rappelons que $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et que T est l'application définie sur E par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \qquad T(f)(x) = f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{2}\Big)$$

1) Montrer que T est un endomorphisme de E.

2) Notons F_n l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ polynomiales de degré au plus n :

$$P \in F_n \iff \exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \; \forall x \in [0,1], \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

a) Montrer que F_n est un sous-espace vectoriel de E. Donner sans preuve sa dimension.

b) Vérifier que, pour tout $P \in F_n$, $T(P) \in F_n$. Notons T_n l'endomorphisme de F_n défini par

$$\forall P \in F_n \qquad T_n(P) = T(P)$$

c) Soit $P_k : x \mapsto x^k$. Déterminer la matrice de T_3 dans la base canonique (P_0, P_1, P_2, P_3) de F_3.

d) Montrer que $(T_n(P_k))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre. En déduire que T_n est un isomorphisme.

3) Étude du noyau de l'endomorphisme $(2\,\mathrm{id}_E - T)$.
Soit $E_2 = \mathrm{Ker}\,(2\,\mathrm{id}_E - T)$.

a) Montrer que

$$f \in E_2 \iff \forall x \in [0,1], \; f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$$

b) En cherchant des exemples simples, montrer que $E_2 \neq \{0\}$.

c) Soit $f \in E_2$ fixé. Montrer que f est bornée sur $[0,1]$ et qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ et $x_1 \in [0,1]$ tels que $f(x_0) = m = \min\limits_{x \in [0,1]} f(x)$ et $f(x_1) = M = \max\limits_{x \in [0,1]} f(x)$.

d) Montrer que $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = m$.

e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = m$.

f) En déduire la valeur de $f(0)$.

g) Faire un étude similaire pour M et x_1. En déduire que $m = M$.

h) Que peut-on dire de f ?

i) En déduire que $E_2 = \{f \in E \mid f \text{ constante }\}$.

4) Étude de la fonction cot.

Pour tout $x \in \mathscr{D}$, notons $\cot(x) = \pi\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

a) Vérifier que cot est définie et continue sur $\mathscr{D}$, qu'elle est impaire et périodique de période 1.

b) Montrer que cot admet le développement suivant au voisinage de 0 :

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{\pi^2}{3}x + o(x)$$

Ce développement s'appelle un développement asymptotique.

c) Obtenir, de même, un développement asymptotique à l'ordre 1 au voisinage de $x = 1$.

d) Démontrer que, pour tout nombre réel $x \in \mathscr{D}$, $\dfrac{x}{2} \in \mathscr{D}$ et $\dfrac{x+1}{2} \in \mathscr{D}$.

e) Montrer que $\forall x \in \mathscr{D}$, $\cot\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cot\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x)$.

5) Calcul de φ.

a) À l'aide de l'expression de φ_N trouvée à la question 2c de la partie 1, montrer que,

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$$

b) Montrer que $h = \varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[0, 1]$, et que $h(0) = 0$.

c) Montrer que $h \in E_2$, où E_2 est défini à la question 3.

d) À l'aide du résultat de la question 3i, montrer que $\varphi = \cot$.

Ainsi, nous venons de montrer que $\qquad \forall x \in \mathscr{D} \qquad \pi\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$.

6) Application.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - x\cot(x)}{2x^2}$.

b) Montrer que la fonction S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$$

est définie et continue sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

d) Déduire des questions précédente la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ sera noté

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

On admettra l'identité classique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On admettra aussi la convergence, pour tout $u \in]-1,1[$, de la série $\sum_{n\geqslant 1} -\frac{u^n}{n}$ ainsi que sa valeur

$$\forall u \in]-1,1[, \qquad \ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{u^n}{n}$$

1) Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1,1[$.
On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

2) Soit $z \in D$. Dessiner D. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $t \in \mathbb{R}$ pour que $tz \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur un intervalle ouvert incluant $[-1,1]$ et donner une expression simple de sa dérivée sur $[-1,1]$.

3) Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ est constante sur $[0,1]$, et en déduire que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}.$$

4) Montrer que $|L(z)| \leqslant -\ln(1-|z|)$ pour tout z dans D.
En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} L(z^n)$ est convergente pour tout z dans D.

Dans la suite, pour tout $z \in D$ on note

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

5) Soit $z \in D$. En admettant que exp est continue sur $\mathbb{C}$, Vérifier que

$$P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$$

et que, pour tout réel $t > 0$,

$$\ln P\left(e^{-t}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - e^{-nt}\right)$$

6) Question indépendante des précédentes : À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-u}\right) \mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE