Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 12 octobre 2020

Épreuve de Mathématiques 3

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, sa dérivée k-ième sera notée $f^{(k)}$, où $k \in \mathbb{N}$.

1) On considère la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t} \end{cases}$$

a) **i)** Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
On considérera désormais g prolongée, et on notera aussi g ce prolongement.

ii) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) **i)** Prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Dans la suite du problème, on admet l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

ii) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la convergence puis la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{t}\,\mathrm{d}t$$

c) Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $t \mapsto \ln(g(t))$.

d) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$ converge. On admet

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

e) Quelle est la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$? Donner, lorsque n tend vers $+\infty$, un équivalent de $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t$. On pourra s'aider d'un changement de variable.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Exprimer $\sin 2t$ en fonction de $\sin t$ et $\cos t$, pour $t \in \mathbb{R}$.

c) Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$?

3) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h_n(t) = \sin^n t$$

Soit $n \geqslant 2$.

a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |h_n^{(k)}(t)| \leqslant K$$

b) **i)** Déterminer un équivalent de h_n en 0. En déduire son développement limité à l'ordre n en 0.

ii) Établir l'égalité $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$. On justifiera soigneusement.

c) Justifier, pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t$.

d) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

On pourra procéder à des intégrations par parties et raisonner par récurrence.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expression de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} \mathrm{d}t$ sous forme de somme.

a) Exprimer $\sin t$ à l'aide de e^{it} et e^{-it}.

b) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad h_{2n}(t) = \sin^{2n} t = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}$$

c) En déduire une expression de $h_{2n}^{(2n-1)}$ comme combinaison linéaire d'exponentielles complexes.

d) Puis, en déduire, pour tout réel t, l'égalité

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt)$$

e) Finalement, en déduire l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$$

5) Étude asymptotique de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t$.

a) Prouver, quand $n \to +\infty$, à l'aide d'une majoration, que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

b) **i)** Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur l'intervalle $]0, \dfrac{\pi}{2}]$.

ii) En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, la relation

$$\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \, \mathrm{d}t = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

On pourra utiliser le développement limité obtenu à la question 1c pour obtenir un équivalent de $\ln\left(\dfrac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)$, où $\varepsilon_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

c) **i)** Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant 1 - e^{-u} \leqslant 2u$.

ii) Justifier l'existence de $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b]$,

$$-t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0$$

On utilisera le résultat de 1c.

iii) Avec le b trouvé précédemment, en déduire que, pour tout $t \in]0, b]$,

$$e^{-nt^3} - 1 \leqslant \Big(e^{-nt^3} - 1\Big) e^{-n\frac{t^2}{6}} \leqslant \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n - e^{-\frac{nt^2}{6}} \leqslant 0$$

iv) En déduire, pour tout n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \, \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) \, \mathrm{d}t$$

Puis, toujours pour n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \, \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant 2 \frac{\ln^4 n}{n}$$

d) En déduire, lorsque $n \to +\infty$, l'équivalence

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \, \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

On se souviendra des résultats obtenus dans la question 1.

Exercice 2

Dans tout l'exercice α désigne un réel strictement supérieur à 1.

1) Soit un entier n strictement positif.

a) Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \, \mathrm{d}t$.

b) En effectuant le changement de variable $t = \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que l'application

$$f_n : u \longmapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ et exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n} \, \mathrm{d}u$ en fonction de l'intégrale I_n.

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \forall u \geqslant 0, \qquad \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1 + u.$$

d) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \qquad f_n(u) \leqslant \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u}.$$

2) Déterminer la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{u}{n}\right)^n$ pour $u \geqslant 0$.

3) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n} \, \mathrm{d}u.$$

a) Déterminer la limite f de la suite de fonctions (f_n) pour la convergence simple, sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b) Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ où $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} \, \mathrm{d}u$.

c) En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers plus l'infini.

FIN DE L'ÉPREUVE