Épreuve de Mathématiques 2

Correction

Exercice 1 (E3A PC 2024)

1) Pour $0 \leq x \leq 1$, comme $x \geq 0$, $0 \leq x^2 \leq x$. Pour $1 \leq x$, il vient $x \leq x^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\implies x^2 \leq x \\ 1 \leq x &\implies x \leq x^2 \end{aligned}$$

2) a) La fonction $t \mapsto e^{\alpha \ln t}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme fonction usuelle. Donc

$$f : t \mapsto \sin(t^\alpha) \text{ est dérivable sur } [1, +\infty[$$

De plus, pour $t \geq 1$, $f'(t) = u' \cos u$ avec $u = t^\alpha$ et $u' = \alpha t^{\alpha-1}$. D'où

$$f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} \cos(t^\alpha)$$

b) La fonction φ est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme $\varphi(t) = t^{-1}f(t)$,

$$\varphi'(t) = -t^{-2} \sin(t^\alpha) + \alpha t^{\alpha-2} \cos(t^\alpha)$$

c) Soit $t \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} |\varphi'(t)| &= \left| -t^{-2} \sin(t^\alpha) + \alpha t^{\alpha-2} \cos(t^\alpha) \right| \\ &\leq t^{-2} |\sin(t^\alpha)| + \alpha t^{\alpha-2} |\cos(t^\alpha)| && \text{Inégalité triangulaire, et } \alpha \geq 0. \\ &\leq t^{-2} + \alpha t^{\alpha-2} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad |\varphi'(t)| \leq \frac{1 + \alpha t^\alpha}{t^2}$$

d) Soit $n \geq 1$, et $t \in [n, n+1]$. La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[n, t] \subset [1, +\infty[$, donc l'inégalité des accroissements finis entre t et n s'écrit

$$|\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \|\varphi'\|_\infty^{[n,t]} |t - n|$$

Or, d'après 2c, $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x^2} + \frac{\alpha}{x^{2-\alpha}}$ pour $x \in [n, t]$.

De plus, les fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ sont décroissantes ($2 - \alpha > 1 > 0$, donc

$$\forall x \in [n, t], \quad \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^{2-\alpha}} \leq \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

D'où

$$\forall x \in [n, t], \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$$

Donc, en passant à la borne sup, l'inégalité étant vraie pour tout $x \in [n, t]$,

$$\|\varphi'\|_{\infty}^{[n,t]} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$$

Conclusion,

$$\forall n \geq 1, \forall t \in [n, n+1], \quad |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) |t - n|$$

3) Soit $n \geq 1$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, $t - n \geq 0$. Donc l'inégalité précédente s'écrit

$$\forall t \in [n, n+1], \quad -\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) (t - n) \leq \varphi(t) - \varphi(n) \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) (t - n)$$

En intégrant de n à $n+1$, il vient

$$-\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) \int_n^{n+1} t - n \, dt \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) \, dt - \int_n^{n+1} \varphi(n) \, dt \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) \int_n^{n+1} t - n \, dt$$

$$\text{Or } \int_n^{n+1} t - n \, dt = \left[\frac{(t-n)^2}{2} \right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}, \text{ d'où}$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) \leq u_n - a_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right)$$

Ainsi, comme $1/2 \leq 1$, (*notre majoration est trop précise!*)

$$\forall n \geq 1, \quad |u_n - a_n| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$$

4) a) La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: Pour tout $t \geq 1$,

$$\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| = \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \, dt$ converge absolument. Ce qui s'écrit aussi :

$$\text{La fonction } t \mapsto \frac{\cos t}{t^2} \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[$$

b) Posons

$$\begin{cases} u = -\cos t & u' = \sin t \\ v = \frac{1}{t} & v' = -\frac{1}{t^2} \end{cases}$$

De plus, la majoration

$$\forall t \geq 1, \quad |uv| = \left| \frac{-\cos t}{t} \right| \leq \frac{1}{t}$$

donne $\lim_{t \rightarrow +\infty} uv = 0$. D'après le théorème d'intégration par parties, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \, dt$ sont donc de même nature – convergentes d'après la question 4a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \text{ converge}$$

Attention à la terminologie ! La convergence n'est pas absolue (cf exercice fait en TD), donc la fonction n'est pas « intégrable » sur $[1, +\infty[$.

- 5) Posons $u = \psi(t) = t^\alpha$. Comme $\alpha > 0$, la fonction ψ , $\mathcal{C}^1$, est strictement croissante et bijective de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. De plus, $du = \alpha t^{\alpha-1} dt$, donc $dt = \frac{1}{\alpha} u^{(1-\alpha)/\alpha} du$.

Ainsi, d'après le théorème de changement de variable, les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha} \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{\frac{1}{\alpha}}} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du$$

sont de même nature. Or la seconde intégrale est $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$, convergente d'après 4b :

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$ converge

- 6) Soit $n \geq 1$. D'après la relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^n u_k = \int_1^{n+1} \varphi(t) dt$$

D'après la question 5, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$ existe et $\in \mathbb{R}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$ aussi, c'est-à-dire

La série de terme général u_n converge

- 7) D'après Riemann, $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ convergent : $2 > 1$ et $2 - \alpha > 2 - 1 = 1$. La série $\sum \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$ converge donc, comme combinaison linéaire de séries convergentes.

D'après la majoration trouvée à la question 5, le théorème de majoration des séries positives entraîne que

La série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument

- 8) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n + (a_n - u_n)$. Or $\sum u_n$ converge (question 6) et $\sum (u_n - a_n)$ converge (question 7). Ainsi, comme somme de séries convergentes,

La série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge

- 9) a) Comme $|\sin| \leq 1$, d'après la question 1

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \leq \frac{|\sin(n^\alpha)|}{n} = |a_n|$$

Or $\sum |a_n|$ converge par hypothèse. Donc, d'après le théorème de majoration,

La série $\sum \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente

b) Reprenons la démarche de la question 4. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(2t)}{2t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: Pour tout $t \geq 1$,

$$\left| \frac{\sin(2t)}{2t^2} \right| \leq \frac{1}{2t^2}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{2t^2} dt$ converge absolument.

Posons

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \sin(2t) & u' = \cos(2t) \\ v = \frac{1}{t} & v' = -\frac{1}{t^2} \end{cases}$$

La majoration $|uv| \leq \frac{1}{2t}$ donne $\lim_{t \rightarrow +\infty} uv = 0$. D'après le théorème d'intégration par parties, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{2t^2} dt$ sont donc de même nature – convergentes d'après ci-dessus :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx \text{ converge}}$$

c) En suivant l'indication, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{\cos(2n^\alpha)}{n} = \frac{1}{n} - \frac{2 \sin^2(n^\alpha)}{n}$$

Or, d'après 9a, $\sum \frac{2 \sin^2(n^\alpha)}{n}$ converge, et on vient d'admettre que l'on peut démontrer que $\sum \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ converge. Donc $\sum \frac{1}{n}$ converge, comme somme de série convergentes, ce qui est absurde.

Finalement, par l'absurde,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge, mais ne converge pas absolument}}$$

Exercice 2 (CCINP PC 2024)

Partie 1 (Une expression intégrale d'une série)

1) Les deux questions qui suivent sont extrêmement classiques.

Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé, $f : t \mapsto t^k e^{-t}$ est positive, et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ car composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.

Étude en $+\infty$: par croissance comparée

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 t^k e^{-t} = 0$$

donc,

$$t^k e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (Riemann $\alpha = 2 > 1$), donc

$$\boxed{I_k \text{ converge}}$$

2) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(k) : I_k = k!$$

est vraie pour tout $k \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0 : I_0 = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$, donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\mathcal{H}_k \implies \mathcal{H}_{k+1}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. L'intégrale I_{k+1} converge d'après ci-dessus. Effectuons une intégration par parties, posons

$$\begin{cases} u = t^{k+1} & u' = (k+1)t^k \\ v = -e^{-t} & v' = e^{-t} \end{cases}$$

Par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow +\infty} uv = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{k+1}e^{-t} = 0$.

Donc, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales I_k et I_{k+1} sont de même nature (convergentes d'après 1), et

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \int_0^{+\infty} t^{k+1}e^{-t} dt \\ &= [-t^{k+1} \times e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (k+1)t^k e^{-t} dt \\ &= (k+1)I_k && \text{Or } \mathcal{H}_k : I_k = k! \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

- **Conclusion** : Pour tout $k \geq 0$, $I_k = k!$.

3) Comme $P = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n$ est un polynôme, il se développe en

$$P = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^d a_k X^k$$

où $d = n$ est le degré de P . Ainsi, l'intégrale étudiée est une combinaison linéaire des intégrales I_k précédentes, par linéarité de l'intégrale :

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$ converge

Certes, le binôme donne les a_k , mais ce n'est pas utile pour la question précédente.

La formule du binôme de Newton s'écrit

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \left(\frac{t}{n}\right)^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell} t^\ell \end{aligned}$$

Donc, par linéarité (toutes les intégrales ont été étudiées et convergent) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt &= \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell} I_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell} && \text{D'après la question 2, } I_\ell = \ell! \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell} = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$$

Partie 2 (Un équivalent)

- 1) Posons $t = n + v$, c'est-à-dire $v = \varphi(t) = t - n$. La fonction φ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[n, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. De plus, $dt = dv$.

L'intégrale commence à $t = n$, on veut la faire commencer à 0, donc on pose $t = n + v$, comme pour les DL. C'est le changement de variable le plus simple. Ce changement affine est tellement simple qu'on peut aussi alléger la rédaction de l'invocation du théorème de changement de variable.

Donc, d'après le théorème de changement de variable, les intégrales

$$\int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{n+v}{n}\right)^n e^{-(n+v)} dv$$

sont de même nature, donc convergentes d'après 1.4. De plus, elles sont égales :

$$J_n = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v} dv$$

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale K_n converge car $K_n = e^n 2^{-n} J_n$ qui converge d'après 1.

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq 1 + \frac{v}{2n} &\leq e^{\frac{v}{2n}} && \text{On applique } 1 + x \leq e^x \\ \implies \forall v \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n &\leq e^{\frac{v}{2}} && \text{Par croissance de } u \mapsto u^n \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ \implies \forall v \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} &\leq e^{-\frac{v}{2}} && \text{Car } e^{-v} \geq 0 \\ \implies \forall v \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} dv &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{v}{2}} dv && \text{Par croissance de l'intégrale} \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale converge d'après le critère des exponentielles ($\beta = 1/2 > 0$).

Ainsi, (K_n) est bornée par $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{v}{2}} dv$:

La suite (K_n) est bornée

- 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1,

$$\begin{aligned} J_n &= e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v} dv \\ &= e^{-n} \int_0^{+\infty} 2^n \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} dv \\ &= \left(\frac{2}{e}\right)^n K_n \end{aligned}$$

Or (K_n) est bornée, et $q = 2/e \in [0, 1[$. Donc, comme produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle,

La suite (J_n) converge vers 0

- 4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons le changement de variable $t = u\sqrt{n}$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u\sqrt{n}}{n}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} \sqrt{n} du \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} du \\ &= \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u) du && \text{Car } \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} f_n(u) du = 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} du = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u) du$$

5) Soit $u \in]0, \sqrt{n}[$. Par définition, $f_n(u) > 0$, et

$$\begin{aligned} \ln(f_n(u)) &= \ln \left[\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} \right] \\ &= n \ln \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) + \ln(e^{-u\sqrt{n}}) \\ &= n \ln \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n} \end{aligned}$$

Or $x = \frac{u}{\sqrt{n}} \in]0, 1[$ car $u \in]0, \sqrt{n}[$. Donc, d'après le développement en série entière de $\ln(1+x)$, de rayon 1,

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k \\ &= \frac{u}{\sqrt{n}} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}}} \end{aligned}$$

D'où, en multipliant par n , il vient

$$\forall u \in]0, \sqrt{n}[, \quad \ln(f_n(u)) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}$$

6) Soit $u \in]0, \sqrt{n}[$. Notons $a_k = \frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}k} > 0$. La série $\sum_{k \geq 2} (-1)^{k-1} a_k$ est alternée. Comme

$$a_k = n \times \frac{1}{k} \left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^k \quad \text{et} \quad \frac{u}{\sqrt{n}} \in]0, 1[$$

La suite (a_k) est décroissante (produit de suites décroissantes positives) et de limite nulle (idem).

Donc, d'après le critère des séries alternées, en notant $U = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k-1} a_k$ et $U_n = \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} a_k$, U est compris entre U_n et U_{n+1} . Pour $n = 2$, il vient

$$-a_2 \leq U \leq -a_2 + a_3$$

C'est-à-dire

$$-\frac{u^2}{2} \leq \ln(f_n(u)) \leq -\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3\sqrt{n}}$$

D'où

$$\forall u \in]0, \sqrt{n}[, \quad \left| \ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{3\sqrt{n}}$$

De plus, $\frac{u}{\sqrt{n}} \in]0, 1[$, donc $\frac{u^3}{3\sqrt{n}} \leq \frac{u^2}{3}$, puis $-\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3\sqrt{n}} \leq -\frac{u^2}{6}$:

$$\forall u \in]0, \sqrt{n}[, \quad \ln(f_n(u)) \leq -\frac{u^2}{6}$$

Pour cette inégalité, on part du résultat, et de l'encadrement au-dessus. On voit qu'il faut avoir $\frac{u}{\sqrt{n}} \in]0, 1[\dots$ ce qui est le cas !

7) Convergence absolue de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du$:

La fonction $f : u \mapsto e^{-u^2/2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: Par croissance comparée,

$$u^2 u e^{-u^2/2} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $f(u) = o(\frac{1}{u^2})$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison,

La fonction $u \mapsto e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

Convergence simple de (f_n) : Soit $u \in \mathbb{R}_+$ fixé. Soit $n > u^2$. Donc $u < \sqrt{n}$ et $f_n(u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}}$.

Or

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n &= e^{n \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= e^{n \left(\frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} && \text{DL de } \ln(1+x) \\ &= e^{u\sqrt{n} - \frac{u^2}{2} + o(1)} \end{aligned}$$

D'où

$$f_n(u) = e^{-\frac{u^2}{2} + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-u^2/2}$$

Conclusion

(f_n) converge simplement vers $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto e^{-u^2/2} \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+$

Dans l'esprit du sujet, il faut plutôt utiliser la question 6 pour en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(f_n(u)) = -u^2/2$, puis composer par l'exponentielle. On peut aussi dérouler une méthode classique, en 4 lignes, sans se poser de questions...

8) Appliquons le théorème de convergence dominée : Posons

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto e^{-u^2/6} \end{cases}$$

De même qu'à la question 7, la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 6, et en composant par l'exponentielle, croissante :

$$\forall u \in]0, \sqrt{n}[, \quad f_n(u) \leq \varphi(u)$$

Or $f_n(u) = 0 \leq \varphi(u)$ pour $u \geq \sqrt{n}$. Comme $f_n \geq 0$,

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad |f_n(u)| \leq \varphi(u)$$

Ainsi,

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- La suite (f_n) converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question 7.

- La fonction $\varphi : u \mapsto e^{-u^2/6}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_n| \leq \varphi$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(u) du \right) = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du$$

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell} &= \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt && \text{D'après la question 1.3} \\ &= I_n + J_n \\ &= \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u) du + o(1) && \text{D'après les questions 3 et 4} \\ &= \sqrt{n} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + o(1) \right) + o(1) && \text{D'après la question 8} \\ &\sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}} \end{aligned}$$

Conclusion

$$\sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell} \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$$

Exercice 3 (HEC B/L 2016)

- 1) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $g : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[x, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: $t^2 g(t) = t^2 e^{-t^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée.

Donc $g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison des fonctions positives, $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente

Comme $x \mapsto e^{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$,

f est définie sur $\mathbb{R}$

- 2) *Du x dans les bornes et uniquement dans les bornes : poser une primitive de ce qu'il y a à l'intérieur.*

Soit G_0 la primitive de $g : t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0. Notons $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Alors, par Chasles,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_x^{+\infty} g(t) dt = \int_x^0 g(t) dt + I = -G_0(x) + I$$

Une primitive étant définie à une constante près, on peut choisir une primitive G de g telle que $G = G_0 - I$. Dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} g(t) dt = -e^{x^2} G(x)$$

Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$,

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

De plus, comme $G' = g$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -2xe^{x^2}G(x) - e^{x^2}G'(x) = 2xf(x) - e^{x^2}e^{-x^2}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -1 + 2xf(x)}$$

- 3) a) Pour tout $x > 0$, posons $\varphi(x) = -G(x) - \frac{1}{2}x^{-1}e^{-x^2}$. φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi'(x) = -g(x) + \frac{1}{2}x^{-2}g(x) + g(x) = \frac{1}{2x^2}e^{-x^2} > 0$$

Donc φ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ comme reste d'une intégrale convergente, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

Ou bien : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = I - I = 0$.

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	
φ	0	

Donc $\varphi \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est-à-dire

$$\boxed{\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt - \frac{1}{2x}e^{-x^2} \leq 0}$$

- b) Soit $x \geq 0$. Comme $2xe^{x^2} \geq 0$, l'inégalité obtenue au 3)a) nous donne

$$\boxed{2xf(x) \leq 1}$$

- c) Comme $x > 0$, L'inégalité 3)b) s'écrit $f(x) \leq \frac{1}{2x}$. Or $t \mapsto e^{-t^2}$ et $x \mapsto e^{x^2}$ sont positives sur $\mathbb{R}$ donc on a l'encadrement

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$$

Ainsi, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

- d) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, d'après 2), $f'(x) = -1 + 2xf(x)$, et, d'après 3)b), $2xf(x) \leq 1$. Donc $f' \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $f'(0) = -1$, donc en conclusion

$$\boxed{f' \leq 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$$

- 4) a) La méthode habituelle – continuité, étude aux points où il y a des problèmes – fonctionne toujours, mais changeons un peu.

Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est paire, et que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge d'après 1), $\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt$ converge aussi.

En conclusion,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ converge et } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

b) Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge, par définition $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \ell \in \mathbb{R}$.

De plus, $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive, et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, donc $\ell > 0$.

Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2} \ell = +\infty$. Conclusion

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = e^{x^2} \int_{-x}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Effectuons le changement de variable $u = -t$, qui est $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, bijectif, de $[-x, +\infty[$ sur $]-\infty, x]$.

$$\int_{-x}^{+\infty} e^{-t^2} dt = - \int_x^{-\infty} e^{-t^2} du = \int_{-\infty}^x e^{-t^2} du$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= e^{x^2} \left(\int_{-\infty}^x e^{-t^2} du + \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) \\ &= e^{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \sqrt{\pi} e^{x^2} \end{aligned}$$

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + f(-x) = \sqrt{\pi} e^{x^2}$$

d) En dérivant l'expression trouvée au 4)c) il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(-x) = f'(x) - 2x\sqrt{\pi}e^{x^2} \leq 0$$

Conclusion : $f' \leq 0$ sur $\mathbb{R}_-$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -1 + 2xf(x)$, avec $f \geq 0$. Or $x \leq 0$ ici, d'où le signe de f' sur $\mathbb{R}_-$ directement.

5) a) C'est la même idée que le $t = t + 1 - 1$: on fait apparaître le u' du $u'e^u$.

Soit $x > 0$. Comme, pour tout $t \geq x$, $e^{-t^2} = -\frac{1}{2t} \left(-2te^{-t^2} \right)$, posons

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2t} & u' &= \frac{1}{2t^2} \\ v &= e^{-t^2} & v' &= -2te^{-t^2} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} uv = 0$, d'après le théorème d'intégration par parties, $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $-\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt$ sont de même nature - convergentes d'après la question 1.

On effectue l'intégration par partie entre x et $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2t} e^{-t^2} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} + \frac{1}{4} \int_x^{+\infty} \frac{-2te^{-t^2}}{t^3} dt$$

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^3} = 0$, on effectue une nouvelle intégration par parties : de même, d'après le théorème d'intégration par parties les deux intégrales sont de même nature, convergentes d'après ci-dessus car la première l'est, et

$$\int_x^{+\infty} \frac{-2te^{-t^2}}{t^3} dt = \left[\frac{e^{-t^2}}{t^3} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} -3 \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt = -\frac{e^{-x^2}}{x^3} + 3 \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt$$

En conclusion, lorsqu'on remplace dans l'expressions de $f(x)$, il vient

$$\forall x > 0 \quad f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \frac{3e^{x^2}}{4} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt$$

b) But : $2xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Problème : l'intégrale. Solution : majorer pour se ramener à une intégrale connue, typiquement celle de e^{-t^2} . Garder seulement $1/t^4$ ne suffirait pas à compenser le e^{x^2} .

Soit $x > 0$. Pour tout $t \geq x$,

$$\begin{aligned} t \geq x > 0 &\implies 0 < \frac{1}{t^4} \leq \frac{1}{x^4} && \text{Par décroissance de } u \mapsto 1/u^4 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\implies 0 < \frac{e^{-t^2}}{t^4} \leq \frac{e^{-t^2}}{x^4} && \text{Car } e^{-t^2} > 0 \end{aligned}$$

Donc, par croissance de l'intégrale entre x et $+\infty$ (toutes les intégrales convergent d'après ci-dessus) :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x^4} dt \\ \implies 0 &\leq \frac{3xe^{x^2}}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt \leq \frac{3}{2x^3} e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{3}{2x^3} f(x) && \text{Car } \frac{3xe^{x^2}}{2} > 0 \end{aligned}$$

Or, d'après 3)c), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^{x^2}}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt = 0$

D'où, d'après 5)a), $2xf(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} + o(1) = 1 + o(1)$, puis

$$f(x) \sim \frac{1}{2x}$$

6) a) Pour tout $n \geq 1$ on pose $\mathcal{H}_n$: f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

- $\mathcal{H}_1$ est vraie d'après 2).
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après 2), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -1 + 2xf(x)$. Or f est $\mathcal{C}^n$. Donc f' est $\mathcal{C}^n$, donc f est $\mathcal{C}^{n+1}$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \geq 0$ f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$

C'est une récurrence immédiate. Mais la faire prend 4 lignes : autant l'écrire. On peut aussi passer par une primitive : si G est une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$, G est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$. De plus, $f(x) = e^{x^2} (\lim_{+\infty} G - G(x))$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En conclusion :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}$$

b) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \exists (P_n, Q_n) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad f^{(n)} = P_n f + Q_n$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: $P_0 = 1$ et $Q_0 = 0$ conviennent : $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit P_n et Q_n deux polynômes qui conviennent :

$$f^{(n)} = P_n f + Q_n$$

Comme f est $\mathcal{C}^\infty$ d'après 6)a), on peut dériver :

$$f^{(n+1)} = P_n' f + P_n f' + Q_n'$$

Or d'après 2), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xf(x) - 1$. En remplaçant dans l'expression ci-dessus

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n+1)}(x) = P'_n(x)f(x) + 2xP_n(x)f(x) - P_n(x) + Q'_n(x)$$

Donc en posant $P_{n+1} = P'_n + 2XP_n$ et $Q_{n+1} = -P_n + Q'_n$, qui sont deux polynômes, il vient

$$f^{(n+1)} = P_{n+1}f + Q_{n+1}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion** : $\forall n \geq 0 \quad \exists (P_n, Q_n) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad f^{(n)} = P_n f + Q_n$

De plus les suites (P_n) et (Q_n) sont définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = 1 \\ Q_0 = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{l} P_{n+1} = P'_n + 2XP_n \\ Q_{n+1} = Q'_n - P_n \end{array} \right.$$

- c) Pour ce genre de questions, la méthode est toujours la même : tester pour les premiers termes, conjecturer la réponse (tout ça au brouillon évidemment), puis formaliser sous la forme $P_n = a_d X^d + \tilde{P}_n$ avec $\deg \tilde{P}_n \leq d - 1$, et le montrer par récurrence.

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \exists (\tilde{P}_n, \tilde{Q}_n) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_n = 2^n X^n + \tilde{P}_n & \text{et} \quad \deg \tilde{P}_n \leq n - 1 \\ Q_n = -2^{n-1} X^{n-1} + \tilde{Q}_n & \text{et} \quad \deg \tilde{Q}_n \leq n - 2 \end{array} \right.$$

est vraie pour tout $n \geq 1$.

- $\mathcal{H}_1$: D'après b), $P_1 = 2X$ et $Q_1 = P_0 = 1$, donc $\tilde{P}_1 = \tilde{Q}_1 = 0$ conviennent.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit $\tilde{P}_n$ et $\tilde{Q}_n$ deux polynômes qui conviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n = 2^n X^n + \tilde{P}_n \\ \deg \tilde{P}_n \leq n - 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_n = -2^{n-1} X^{n-1} + \tilde{Q}_n \\ \deg \tilde{Q}_n \leq n - 2 \end{array} \right.$$

En utilisant les formules de récurrence trouvée au b)

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P'_n + 2XP_n \\ &= 2^n n X^{n-1} + \tilde{P}'_n + 2^{n+1} X^{n+1} + 2X\tilde{P}_n \\ &= 2^{n+1} X^{n+1} + \tilde{P}_{n+1} \end{aligned}$$

Où $\tilde{P}_{n+1} = 2^n n X^{n-1} + \tilde{P}'_n + 2X\tilde{P}_n$. Comme

$$\deg \tilde{P}'_n = \deg \tilde{P}_n - 1 \leq n - 2 \quad \text{et} \quad \deg 2X\tilde{P}_n = 1 + \deg \tilde{P}_n = n$$

on a $\deg \tilde{P}_{n+1} \leq \min(n - 1, n - 2, n) = n$.

De même, pour Q_{n+1} ,

$$Q_{n+1} = Q'_n - P_n = -2^{n-1}(n-1)X^{n-2} + \tilde{Q}'_n - 2^n X^n - \tilde{P}_n = -2^n X^n + \tilde{Q}_{n+1}$$

Où $\tilde{Q}_{n+1} = -2^{n-1}(n-1)X^{n-2} + \tilde{Q}'_n - \tilde{P}_n$. Comme $\deg P_n \leq n - 1$ et que les autres sont de degré strictement inférieurs, $\deg \tilde{Q}_{n+1} \leq n - 1$.

Ainsi, il vient

$$\exists (\tilde{P}_{n+1}, \tilde{Q}_{n+1}) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_{n+1} = 2^{n+1} X^{n+1} + \tilde{P}_{n+1} & \text{et} \quad \deg \tilde{P}_{n+1} \leq n \\ Q_{n+1} = -2^n X^n + \tilde{Q}_{n+1} & \text{et} \quad \deg \tilde{Q}_{n+1} \leq n - 1 \end{array} \right.$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion** : $\forall n \geq 1 \exists (\tilde{P}_n, \tilde{Q}_n) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_n = 2^n X^n + \tilde{P}_n & \text{et} \quad \deg \tilde{P}_n \leq n - 1 \\ Q_n = -2^{n-1} X^{n-1} + \tilde{Q}_n & \text{et} \quad \deg \tilde{Q}_n \leq n - 2 \end{array} \right.$

Donc, pour $n \geq 1$, les termes de plus haut degré de P_n et Q_n sont respectivement 2^n et -2^{n-1} .

- 7) a) D'après 2), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xf(x) - 1$. En notant $g : x \mapsto x$, la formule de dérivation de Leibniz nous donne

$$\forall n \geq 1 \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n+1)} = 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$$

Or $g'(x) = 1$ et, pour tout $k > 1$, $g^{(k)}(x) = 0$. Donc

$$\forall n \geq 1 \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n+1)} = 2 \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x)$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n+1)}(x) = 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x)}$$

- b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc elle admet un développement de Taylor-Young au voisinage de 0 à tout ordre n qui s'écrit

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \quad \text{avec} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$$

Ainsi, $a_0 = f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et $a_1 = f'(0)$ or $f'(x) = 2xf(x) - 1$ donc $a_1 = -1$.

D'après a)

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^* \quad a_{k+1} &= \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \\ &= \frac{2k}{(k+1)!} f^{(k-1)}(0) \\ &= \frac{2k}{k(k+1)} a_{k-1} \\ &= \frac{2}{k+1} a_{k-1} \end{aligned}$$

En conclusion

$$\boxed{a_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad a_1 = -1} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{1}{k+1} a_{2k-1} \\ a_{2k+2} &= \frac{2}{2k+3} a_{2k} \end{aligned}}$$

- c) Il faut montrer par récurrence – laissée en exercice – que $a_{2k+1} = -\frac{1}{(k+1)!}$ et $a_{2k} = \frac{2^{2k-1} k! \sqrt{\pi}}{(2k+1)!}$.

Au brouillon, les a_{2k+1} sont immédiats. Pour les a_{2k} , après les tests sur les premiers termes etc on trouve

$$a_{2k} = \left(\prod_{p=1}^k \frac{2}{2p+1} \right) a_0 \text{ puis on écrit}$$

$$\prod_{p=1}^k \frac{2}{2p+1} = \prod_{p=1}^k \frac{2 \times 2p}{2p(2p+1)} = \frac{2^{2k} \prod_{p=1}^k p}{\prod_{p=1}^k 2p(2p+1)} = \frac{2^{2k} p!}{(2p+1)!}$$

FIN DE L'ÉPREUVE