Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comparer x et x^2.

Soit $\alpha \in]0,1[$. On se propose d'étudier la série de terme général $a_n = \dfrac{\sin(n^\alpha)}{n}$, $n \geqslant 1$.

2) On pose, pour tout $t \geqslant 1$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t^\alpha)}{t}$.

- **a)** Justifier que la fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et déterminer sa dérivée.
- **b)** Justifier que φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et déterminer φ'.
- **c)** Montrer que l'on a : $\forall t \in [1,+\infty[$, $|\varphi'(t)| \leqslant \dfrac{1+\alpha t^\alpha}{t^2}$.
- **d)** En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall t \in [n,n+1], \qquad |\varphi(t)-\varphi(n)| \leqslant \left(\frac{1}{n^2}+\frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t-n|$$

3) On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Prouver que l'on a : $\forall n \geqslant 1$, $|u_n - a_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

4) Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

- **a)** Démontrer que $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
- **b)** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5) Démontrer, à l'aide d'un changement de variable, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

6) En déduire que la série de terme général u_n converge.

7) Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ converge absolument.

8) Déduire des questions précédentes que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

9) On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ est convergente.

a) Montrer qu'alors, la série $\sum \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente. Indication : *On pourra utiliser la question 1.*

b) Prouver que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

c) On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est convergente.

Conclure sur la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

Indication : *On pourra utiliser la formule de duplication :* $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$

Exercice 2

Partie 1 (Une expression intégrale d'une série)

Dans cette partie, on détermine une expression de la série $\sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{(n-\ell)!}\frac{1}{n^\ell}$ sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale I_k est convergente.

2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_k = k!$.

3) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, puis que :

$$\sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{(n-\ell)!}\frac{1}{n^\ell} = \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Partie 2 (Un équivalent)

Dans cette partie, on détermine un équivalent de l'intégrale obtenue à la question 3 lorsque $n \to +\infty$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{n} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_n^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Les résultats de la partie précédente impliquent la convergence de ces deux intégrales.

Étude de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$**.**

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant un changement de variable, établir que :

$$J_n = \mathrm{e}^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2+\frac{v}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

2) Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K_n = \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{v}{2n}\right)^n \mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

est bornée. On pourra utiliser librement l'inégalité $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) En déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Étude de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on définit la fonction $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall u \in]0,+\infty[, \quad f_n(u) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}} & \text{si} \quad u < \sqrt{n} \\ 0 & \text{si} \quad u \geqslant \sqrt{n} \end{cases}$$

4) Montrer que :

$$I_n = \sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u$$

Pour les 3/2 : on admettra que,

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$

5) Montrer que pour tout $u \in]0,\sqrt{n}[$, on a l'égalité :

$$\ln\left(f_n(u)\right) = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}$$

6) En déduire que pour tout $u \in]0,\sqrt{n}[$, on a les inégalités :

$$\left|\ln\left(f_n(u)\right) + \frac{u^2}{2}\right| \leqslant \frac{u^3}{3\sqrt{n}}, \quad \ln\left(f_n(u)\right) \leqslant -\frac{u^2}{6}.$$

7) Justifier que la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2/2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Déterminer la limite de (f_n) pour la convergence simple.

8) (5/2) Établir que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u\right) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

Conclusion

9) En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}\frac{n!}{(n-\ell)!}\frac{1}{n^\ell}$ lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que sa dérivée f' vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = -1 + 2xf(x)$$

3) **a)** Établir pour tout réel $x>0$ l'inégalité : $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2x}e^{-x^2} \leqslant 0.$

b) En déduire que, pour tout $x \geqslant 0$, $2xf(x) \leqslant 1$.

c) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tends vers $+\infty$.

d) Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}_+$.

4) On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

a) Montrer la convergence et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

c) Donner, pour tout réel x, l'expression de $f(x)+f(-x)$ en fonction de x à l'aide d'un changement de variable.

d) En déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}_-$.

5) **a)** À l'aide d'intégrations par parties, établir la relation

$$\forall x > 0 \qquad f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \frac{3e^{x^2}}{4}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6) **a)** Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Établir pour tout entier naturel $n \geqslant 0$ l'existence de deux fonctions polynômes P_n et Q_n telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x) + Q_n(x)$$

c) Déterminer, pour $n \geqslant 1$, les termes de plus haut degré respectifs de P_n et Q_n.

7) **a)** Établir, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n+1)}(x) = 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x)$$

b) Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n qui s'écrit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.

Calculer a_0 et a_1. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a_{2k+1} en fonction de a_{2k-1}, puis a_{2k+2} en fonction de a_{2k}.

c) Calculer a_{2k+1} et a_{2k} en fonction de k.

FIN DE L'ÉPREUVE