Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 10 octobre 2022

Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
Ne pas utiliser de correcteur.
Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

1) **a)** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

b) Montrer qu'elle est convergente et de limite nulle.

2) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$.

3) On se propose ici de calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$:

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p = \frac{2}{3+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}.$$

b) Vérifier l'inégalité

$$\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{3}a_{n+1}.$$

c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{3}\,u$.

d) En conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

e) Justifier l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p a_p$.

Exercice 2

1) Pour tout réel x, on pose :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2+t^2}$$

a) Étudier, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale à paramètre $F(x)$.

b) Que vaut $F(0)$?

c) Exprimer, pour tout réel x, $F(x)$ en fonction de x.

2) Soit α un réel positif. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}}, \qquad I_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$$

a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel α pour que la série $\sum u_n$ converge.

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $I_{n+1} \leqslant J_n \leqslant I_n$.

c) **i)** Exprimer, pour tout réel $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $1 + \dfrac{1}{\tan^2 t}$ en fonction <u>uniquement</u> de $\sin^2 t$.

ii) À l'aide du changement de variable $\dfrac{1}{\tan t} = u$, que l'on justifiera avec soin, montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}} \pi^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

<u>Indication</u> : *On pourra, dans un premier temps, découper I_n en 2 intégrales, sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.*

d) En déduire, pour tout entier naturel non nul n : $u_{n+1} \leqslant J_n \leqslant u_n$

e) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel α pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$ converge.

Exercice 3 (Phénomène de Runge)

1) Étude d'une intégrale généralisée.

Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère la fonction $h_\alpha : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1-t^2}{\alpha^2+t^2}\right)$.

a) Montrer que h_α est une fonction continue décroissante intégrable sur $[0, 1[$.

On pose $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Justifier que
$$\begin{aligned} J_\alpha &= \int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

c) En déduire que $J_\alpha = 2\ln(2) - \ln(1+\alpha^2) - 2\alpha \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

d) Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0} J_\alpha$.

e) Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in]0, \gamma[$, $J_\alpha > 0$.

2) Application à une somme de Riemann.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $]0, 1[$ les points $a_{k,n}$ donnés, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, par $a_{k,n} = \dfrac{2k+1}{2n}$ et on pose

$$S_n(h_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(a_{k,n}) = \frac{1}{n}\left(h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + h_\alpha\left(\frac{3}{2n}\right) + \cdots + h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right).$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que

$$\frac{1}{n} h_\alpha\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leqslant \int_{(2k-1)/(2n)}^{(2k+1)/(2n)} h_\alpha(t) \leqslant \frac{1}{n} h_\alpha\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n} h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leqslant S_n(h_\alpha) \leqslant \frac{1}{n} h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + \int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t.$$

c) En déduire que la suite $(S_n(h_\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers J_α.

d) Montrer que, pour $\alpha \in]0, \gamma[$, la suite $\left(\left|\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

3) Le phénomène de Runge.
Dans cette question, $I = [-1, 1]$ et $\alpha > 0$. On considère

$$f_\alpha : \left|\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\alpha^2 + x^2} \end{array}\right.$$

On reprend les points $a_{k,n}$ définis dans la question 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad a_k = \frac{2k+1}{2n}.$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ le polynôme interpolateur de f_α aux $2n$ réels $\{\pm a_{k,n} \in I \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$. Autrement dit R_n est l'unique polynôme de degré au plus $2n-1$ qui coïncide avec f_α aux points

$$-\frac{2n-1}{2n}, -\frac{2n-3}{2n}, \ldots, -\frac{3}{2n}, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \ldots \frac{2n-3}{2n}, \frac{2n-1}{2n}.$$

On admettra l'existence et l'unicité de R_n.
On pose $Q_n(X) = 1 - (X^2 + \alpha^2)R_n(X)$.

a) Montrer que R_n est un polynôme pair et déterminer $Q_n(\alpha\mathrm{i})$.

b) En étudiant les racines de Q_n, montrer qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad Q_n(x) = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1} (x^2 - a_{k,n}^2).$$

c) En déduire que, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$f_\alpha(x) - R_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2 + \alpha^2} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x^2 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}.$$

d) On suppose que $\alpha < \gamma$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} |f_\alpha(1) - R_n(1)| = +\infty.$$

FIN DE L'ÉPREUVE