Épreuve de Mathématiques 2

Correction

Exercice 1 (D'après CCP TSI 2015)

Partie 1 (Préliminaires) **1)** Cours. Si $q=1$, la somme vaut $n+1$, sinon $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Idée : « Une barre de fraction : Est-ce que le dénominateur peut s'annuler ? »

2) L'ensemble de définition de arctangente est $\mathscr{D}_{\text{Arctan}} = \mathbb{R}$, elle est partout dérivable, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\text{Arctan}'(x)$	$+$
Arctan	$-\frac{\pi}{2} \nearrow \frac{\pi}{2}$

Partie 2 (Étude de la série)

1) $|u_n| = \dfrac{1}{2n+1} \sim \dfrac{1}{2n}$, et $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leqslant 1$, série harmonique). Ainsi, par équivalence,

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ n'est pas absolument convergente}}$$

2) $u_n = (-1)^n a_n$, avec (a_n) une suite positive, décroissante (car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ l'est sur $\mathbb{R}_+^*$) de limite nulle. Donc le critère des séries alternées s'applique :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge}}$$

Si on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n, le critère des séries alternées nous dit aussi que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad |R_n| \leqslant |u_{n+1}| = \frac{1}{2n+3}}$$

3) $I_{2k} = \displaystyle\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$.

4) D'après la question précédente, $u_k = (-1)^k I_{2k}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k} && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\, \mathrm{d}t && \text{(linéarité de l'intégrale)} \end{aligned}$$

Or, comme $-t^2 \neq 1$ pour tout $t \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$, et

$$\boxed{U_n = \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}$$

5) *Toujours la même idée : négliger ce qui gêne (pour le calcul : la fraction – les fractions, c'est pénible de toute façon), et garder ce qui sert (pour la majoration voulue : ici du n)*

Pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \geqslant 1$, donc $0 \leqslant \dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}$, puis par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+3}}$$

6) D'après 4),

$$U_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\mathrm{Arctan}\, t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, d'où

$$U_n - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or d'après 5), $\displaystyle\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, par majoration,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{\pi}{4}}$$

Partie 3 (Un procédé élémentaire d'approximation de π) **1)** D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|U_n - \frac{\pi}{4}\right| = \left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

D'où, $\boxed{|4U_n - \pi| \leqslant \dfrac{4}{2n+3}}$

2) $4U_n$ approche π à 10^{-3} près lorsque $\dfrac{4}{2n+3} \leqslant 10^{-3}$, c'est-à-dire $\dfrac{4000-3}{2} \leqslant n$. Donc $n = 1999$ convient :

$$\boxed{\pi = \sum_{n=0}^{1999} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

On remarquera que la série alternée converge lentement : pour avoir 3 chiffres significatifs, il faut près de 2000 termes...

Partie 4 (Un autre procédé d'approximation de π)

1) $\displaystyle\int_0^{t_0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\text{Arctan}\, t]_0^{t_0} = \text{Arctan}\,(t_0)$. Or $\tan(\pi/6) = \dfrac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Il n'est pas interdit de faire un cercle trigonométrique. J'insiste. Vous ne le saviez peut-être pas lors du premier DS, mais désormais vous le savez. Donc vous avez tous su faire cette question, évidemment.

$$\boxed{\int_0^{t_0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6}}$$

2) Sur le modèle de la partie précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, t_0]$, $-t^2 \neq 1$ donc (série géométrique)

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Puis en intégrant entre 0 et t_0,

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t_0^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^{t_0} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Sur le modèle de la majoration du 6),

$$0 \leqslant \int_0^{t_0} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{t_0} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{t_0^{2n+3}}{2n+3} = \frac{1}{(2n+3)(\sqrt{3}^2)^{n+1}\sqrt{3}} = \frac{1}{(2n+3)3^{n+1}\sqrt{3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc, par majoration, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \int_0^{t_0} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi, la série de terme général $(-1)^n \dfrac{t_0^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)3^n\sqrt{3}}$ converge, et a pour somme $\dfrac{\pi}{6}$. En multipliant par 6 il vient

$$\boxed{\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}}$$

3) D'après la question précédente, le reste est majoré par

$$\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{(2n+3)3^{n+1}}}$$

En admettant le résultat de la question précédente, comme la série vérifie le critère des séries alternées, on peut retrouver immédiatement cette majoration

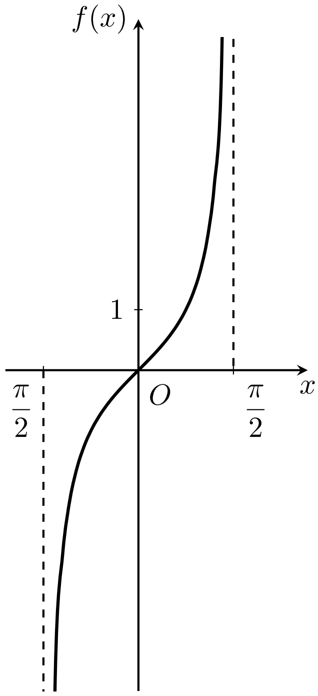
4) 6 termes suffisent ($n = 5$) : $\dfrac{2\sqrt{3}}{13 \times 9 \times 81} < \dfrac{2 \times 2}{12 \times 9 \times 81} < 10^{-3}$.
La convergence de cette série est géométrique.

Exercice 2 (E3A PC 2015)

Partie 1 **1)** $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\qquad \tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$

Ainsi, $\boxed{\text{La fonction tan est } \pi\text{-périodique}}$

2) La fonction tan est strictement croissante ($\tan' = 1 + \tan^2 \geqslant 1 > 0$) et impaire. De plus $\displaystyle\lim_{\pi/2} \tan = +\infty$ d'où une asymptote verticale en $x = \pi/2$.



3) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \text{il existe un polynôme } T_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie, avec $T_0 = X$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$$

En dérivant, il vient

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan^{(n+1)}(x) = (1 + \tan^2(x))T_n'(\tan(x))$$

Donc, en posant $T_{n+1}(X) = (1 + X^2)T_n'(X) \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan^{(n+1)}(x) = T_{n+1}(\tan(x))$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geqslant 0 \qquad \mathcal{H}_n$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite de polynômes } (T_n) \text{ voulue existe}}$

De plus, par construction de T_{n+1}, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+1}(X) = (1 + X^2)T_n'(X)}$

4)

$$\boxed{\begin{array}{rcccl} T_1 & = & (1+X^2)T_0' & = & 1 + X^2 \\ T_2 & = & (1+X^2)T_1' & = & 2X + 2X^3 \\ T_3 & = & (1+X^2)T_2' & = & 2 + 8X^2 + 6X^4 \end{array}}$$

5) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \text{« Les coefficients du polynôme } T_n \text{ sont des entiers naturels » et } \deg T_n = n + 1$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $T_0 = X$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k, \qquad \text{avec} \qquad \forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad a_k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad a_{n+1} \neq 0$$

D'après 3), $T_{n+1}(X) = (1+X^2)T_n'(X)$ donc

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= (1+X^2)\sum_{k=1}^{n+1} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} k a_k X^{k+1} \\ &= a_1 + 2a_2 X + \left(\sum_{k=2}^{n} ((k+1)a_{k+1} + (k-1)a_{k-1})X^k\right) + n a_n X^{n+1} + (n+1)a_{n+1}X^{n+2} \end{aligned}$$

Toujours vérifier ses calculs, par exemple avec T_1, T_2 et T_3 ci-dessus.

Les coefficients de T_{n+1} étant des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs des $a_k \in \mathbb{N}$, ce sont aussi des entiers naturels.

De plus, comme $a_{n+1} \neq 0$, $(n+1)a_{n+1} \neq 0$ donc $\deg T_{n+1} = n+2$.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad \text{« Les coefficients du polynôme } T_n \text{ sont des entiers naturels » et } \deg T_n = n+1}$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, où I est un intervalle contenant 0. La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit, en 0 :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k - \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \,\mathrm{d}t$$

On l'applique à la fonction tangente, de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc $\mathscr{C}^{2n+2}$, au rang $2n+1$, ce qui s'écrit :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}x^k - \int_0^x \frac{\tan^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} \,\mathrm{d}t$$

Or tangente est impaire, donc il ne reste que les termes impairs dans la formule de Taylor : *(changement d'indice dans la somme)*

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1} - \int_0^x \frac{\tan^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} \,\mathrm{d}t$$

De plus, par construction de T_k, on trouve :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T_{2k+1}(\tan(0))}{(2k+1)!}x^{2k+1} - \int_0^x \frac{T_{2n+2}(\tan(t))}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} \,\mathrm{d}t$$

Donc en posant $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ t_k = T_{2k+1}(0)}$ *$(\tan(0) = 0)$*,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}T_{2n+2}(\tan(t)) \,\mathrm{d}t}$$

Partie 2 **1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est $\mathscr{C}^\infty$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\left[f^{(n)}(t)\frac{-(x-t)^n}{n}\right]_0^x - \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{-(x-t)^n}{n} \,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)}$

2) Soit $b \in I$ tel que $b > 0$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $f^{(n)} \geq 0$ et $b > 0$ (donc $b - t \geqslant 0$ sur $[0, b]$), la suite $(R_n(b))$ est positive.

De plus, d'après 1), $R_{n+1}(b) = R_n(b) - \dfrac{b^n}{n!} f^{(n)}(0) \leqslant R_n(b)$.

Ainsi, la suite est décroissante et minorée par 0. Par conséquent, $\boxed{\text{La suite } (R_n(b)) \text{ est convergente}}$

b) Soient $x \in [0, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

i) En effectuant le changement de variable défini par $t = ux$ on obtient :

$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(x-ux)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(ux)x \, \mathrm{d}u = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(tx) \, \mathrm{d}t$$

ii) D'après les calculs du 2)a), comme $x \geqslant 0$, $R_n(x) \geqslant 0$.
De plus, $f^{(n+1)} \geqslant 0$ sur $I \cap \mathbb{R}_+$, donc $f^{(n)}$ croissante sur cet intervalle. En particulier, pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leqslant tx \leqslant tb$ entraîne $f^{(n)}(tx) \leqslant f^{(n)}(tb)$. Ainsi

$$R_n(x) = |R_n(x)| \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 |f^{(n)}(tx)||1-t|^{n-1} \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1} \, \mathrm{d}t$$

Conclusion : $\boxed{0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{x^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1} \, \mathrm{d}t}$

iii) D'après 2)b)i) avec $x = b$, on a $R_n(b) = \dfrac{b^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(tb) \, \mathrm{d}t$. D'où 2)b)ii) s'écrit ($b \neq 0$) :

$$\boxed{0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)}$$

c) Soit $x \in [0, b[$. **Toujours** *citer les questions utilisées, précisément.*

D'après 2)a) la suite $(R_n(b))$ est convergente. De plus, par construction, $0 \leqslant \dfrac{x}{b} < 1$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{b}\right)^n = 0$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b) = 0$.
Donc, par encadrement, 2)b)iii) entraîne $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$ (avec $x > 0$) s'écrit.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x)$$

Donc, en passant à la limite pour $n \to +\infty$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Puisque f est impaire, les $f^{(2n)}(0)$ sont nuls et l'égalité s'étend donc aux x dans $]-b, 0[$ par imparité des deux membres de l'égalité.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in]-b, b[, \ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$

3) La fonction tan vérifie les conditions demandées pour f : elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)) \geqslant 0$ puisque T_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\tan(x) \geqslant 0$.

Pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ on peut trouver un $b \in \left]x, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et le résultat du 2)c) s'applique. Avec $\tan^{(2n)}(0) = 0$ et en posant $t_n = \tan^{(2n+1)}(0)$ comme au I)6), on obtient

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}$$

Exercice 3 (PT 2021)

Partie 1

1) Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est une primitive de $x \mapsto 2x$ *(vérifiez vos primitives : $F' = f$)* donc

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions } y : x \mapsto \lambda e^{-x^2} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$$

En cas de doute, vous pouvez toujours vérifier que ce que vous écrivez est bien solution de l'équation : il suffit de replacer dans l'équation.

2) La fonction f correspond à $\lambda = 1$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x^2}}$$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2} \\ f''(x) &= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2} \\ f'''(x) &= 4xe^{-x^2} + 8xe^{-x^2} + 4x^2(-2x)e^{-x^2} = (12x - 8x^3)e^{-x^2} \end{aligned}}$$

4) *Pour déterminer un maximum – et nous en déterminerons un certain nombre cette année – le plus simple est d'établir le tableau de variations sur l'intervalle concerné.*

Établissons les tableaux de variations de f et f', sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0		$-$		0		$+$		
f'	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}e^{-1/2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\sqrt{2}e^{-1/2}$	$\nearrow$	$f'(1)$	$\nearrow$	0
signe de $f'(x)$			$+$		0			$-$			
f	0		$\nearrow$		1		$\searrow$		$f(1)$	$\searrow$	0

Signe de $f''(x)$: $f''(0) = -2e^0 < 0$ et $2x^2 - 1 = 0$ si et seulement si $x = \pm 1/\sqrt{2}$.

<u>Limites et valeurs de f'</u> : f' est impaire.

Au voisinage de $+\infty$, avec $u = x^2$, $f'(x) = -2\sqrt{u}e^{-u} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

$f'(1/\sqrt{2}) = -2/\sqrt{2}e^{-(1/\sqrt{2})^2} = -\sqrt{2}e^{-1/2}$

On complète par imparité.

On pouvait remarquer que les $f^{(k)}$ étaient paires ou impaires, donc que les $|f^{(k)}|$ sont paires, et qu'on pouvait donc se restreindre à une étude sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\max_{t\in[0,1]} |f(t)| = 1, \qquad \max_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)| = \sqrt{2}e^{-1/2}, \qquad \max_{t\in[0,1]} |f'(t)| = |f'(1)| = \sqrt{2}e^{-1/2}}$$

5) Énoncer le théorème des accroissements finis : cours PCSI.

6) Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $]0,1[$ et continue sur $[0,1]$. De plus, d'après 4,

$$\forall t \in]0,1[, \qquad |f'(t)| \leqslant 2/e$$

D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant 2/e|x-y|$$

Donc, en posant $\boxed{\eta = \varepsilon e/2}$

$$\boxed{\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon}$$

Par rapport à la continuité, le η ne dépend pas de la position du y : c'est une propriété plus forte.

7) Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- Si f est paire, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$, donc en dérivant $\forall x \in \mathbb{R}$, $-f'(-x) = f'(x)$, puis

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(-x) = -f'(x)$$

  Ainsi, f' est impaire.
- De même, si f est impaire, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$, en dérivant $\forall x \in \mathbb{R}$, $-f'(-x) = -f'(x)$, et f' est paire.

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathscr{P}_n : \quad \exists H_n \in \mathbb{R}[X], \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = H_n(x)e^{-x^2} \\ H_n \text{ a la parité de } n \\ \deg H_n = n \end{cases}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- <u>$\mathscr{P}_0$</u> : $H_0 = 1$ convient, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- <u>$\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}$</u> : Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie. Soit $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ qui convient. En particulier, H_n a la parité de n et $\deg H_n = n$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) &= \left(H_n(x)e^{-x^2}\right)' \\ &= H_n'(x)e^{-x^2} - 2xH_n(x)e^{-x^2} \\ &= \left[H_n'(x) - 2xH_n(x)\right]e^{-x^2} \end{aligned}$$

  D'après la remarque faite en début de question, H_n' a la parité de $n+1$. De plus, un produit de fonctions impaires est pair, et un produit d'une fonction paire par une fonction impaire est impaire. Donc $x \mapsto -2xH_n(x)$ a la parité de $n+1$.
  Ainsi, $H_{n+1} = H_n' - 2XH_n$ a la parité de $n+1$.
  De plus, $\deg H_n' = n-1$ et $\deg 2XH_n = n+1 \neq n-1$, donc $\deg H_{n+1} = n+1$.
  Finalement, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad \exists H_n \in \mathbb{R}[X], \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = H_n(x)e^{-x^2} \\ H_n \text{ a la parité de } n \\ \deg H_n = n \end{cases}}$

8) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ci-dessus, $H_{n+1} = H_n' - 2XH_n$. Pour des raisons de degré (calcul effectué à la question 7), le terme en X^{n+1} n'est présent que dans $-2XH_n$.
Par le calcul : soit $G_n \in R_{n-1}[X]$ tel que $H_n = a(H_n)X^n + G_n$. Alors

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= H_n' - 2XH_n \\ &= na(H_n)X^{n-1} + G_n' - 2a(H_n)X^{n+1} - 2XG_n \\ &= -2a(H_n)X^{n+1} + \Big[-2XG_n + na(H_n)X^{n-1} + G_n' \Big] \\ &= -2a(H_n)X^{n+1} + G_{n+1} && \text{où } \deg G_{n+1} \leqslant n \end{aligned}$$

Donc le coefficient dominant de H_{n+1} est $-2a(H_n)$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a(H_{n+1}) = -2a(H_n)}$$

Comme $a(H_0) = a(1) = 1$, $(a(H_n))$ est la suite géométrique :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a(H_n) = (-2)^n}$$

- *Dans ce genre de situations – étude d'une suite de polynômes – vous avez calculé les premiers termes au début du problème. Donc testez vos affirmations sur les premiers termes.*
- *Pour faire des calculs sur le degré d d'un polynome P, il est souvent pratique d'écrire $P = a_d X^d + Q$ avec $\deg Q < \deg P = d$. Ce qui permet de faire des calculs explicites.*

Partie 2 **1)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(-x) &= -x \int_1^2 e^{-(-x)^2 t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= -F(x) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est impaire}}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Effectuons le changement de variable $u = xt$.
$\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$.
Bornes : $\begin{cases} t = 2 & \iff u = 2x \\ t = 1 & \iff u = x \end{cases}$
Ainsi,

$$F(x) = \int_1^2 e^{-(xt)^2} x \,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} e^{-u^2} \,\mathrm{d}u$$

Le résultat reste valable pour $x = 0$. Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_x^{2x} e^{-u^2} \,\mathrm{d}u}$$

3) La fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit G une primitive de cette fonction.
La fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et, d'après la question 2,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = G(2x) - G(x)$$

Conclusion

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ comme composée de fonctions } \mathscr{C}^1}$$

4) Développement limité de exp à l'ordre n en 0 :

$$\boxed{\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)}$$

Par conséquent,

$$e^{-u^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^{2k}}{k!} + o(u^{2n})$$

Puis, en primitivant, avec $K \in \mathbb{R}$ une constante :

$$G(u) = K + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^{2k+1}}{k!(2k+1)} + o(u^{2n+1})$$

Et en remplaçant dans l'expression obtenue à la question 3 :

$$\begin{aligned} F(x) &= G(2x) - G(x) \\ &= K + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2x)^{2k+1}}{k!(2k+1)} + o(x^{2n+1}) - \left(K + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)} + o(x^{2n+1})\right) \quad \text{Car } 2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{2k+1}-1}{k!(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

Ainsi, le développement limité de F à l'ordre $2n+1$ en 0 est

$$\boxed{F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{2k+1}-1}{k!(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})}$$

5) D'après la question 4 de la partie 1, f est décroissante sur $[0, +\infty[$, donc, pour $x \geqslant 0$,

$$\forall u \in [x, 2x], \qquad e^{-4x^2} \leqslant f(u) \leqslant e^{-x^2}$$

En intégrant entre x et $2x$, il vient

$$\begin{aligned} & \int_x^{2x} e^{-4x^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_x^{2x} f(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_x^{2x} e^{-x^2}\,\mathrm{d}u \\ \Longrightarrow \quad 0 \leqslant xe^{-4x^2} = e^{-4x^2} & \int_x^{2x} \mathrm{d}u \leqslant \quad F(x) \quad \leqslant \int_x^{2x} e^{-x^2}\,\mathrm{d}u = xe^{-x^2} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt{t}e^{-t} = 0$ par croissance comparée, donc, avec $t = x^2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = 0$.
Ainsi, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$$

6) **a)** D'après le calcul effectué à la question 3,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = G(2x) - G(x) \quad \text{avec} \quad G' = f$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in R, \quad F'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}}$$

b) On a les équivalences suivantes, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) = 0 &\iff 2e^{-4x^2} = e^{-x^2} \\ &\iff \ln(2) + (-4x^2) = -x^2 \\ &\iff 3x^2 = \ln(2) \\ &\iff x^2 = \frac{\ln(2)}{3} \\ &\iff \boxed{x = \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}} \end{aligned}$$

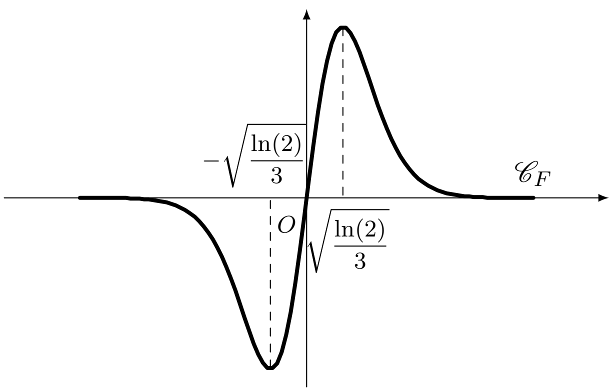
c) Par parité (F impaire) on étudie les variations sur $\mathbb{R}_+$ puis on complète.
F' est continue, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, entre deux valeurs où elle change de signe, elle s'annule.
Ainsi, il reste à déterminer le signe sur $[0, \sqrt{\ln(2)/3}]$, et $[\sqrt{\ln(2)/3}, +\infty[$.
Comme $F'(0) = 1 > 0$, et $F'(1) = 2e^{-4} - e^{-1} < e^{-3} - e^{-1} < 0$ $(e < 2)$, avec $\alpha = \sqrt{\dfrac{\ln(2)}{3}}$,

x	$-\infty$		$-\alpha$		α		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\searrow$	$-F(\alpha)$	$\nearrow$	$F(\alpha)$	$\searrow$	0

7) D'après le calcul effectué à la question 5, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{xe^{-4x^2} \leqslant F(x) \leqslant xe^{-x^2}}$$

8) On donne une allure de la courbe représentative de F sans échelle précise :



9) **a)** Nous avons vu que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc en particulier elle est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

b) Par définition de G, $G' = F$. Or, d'après 6, $F \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Donc G croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Par conséquent,

$$\boxed{\text{Il existe } \ell_G \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \subset \overline{\mathbb{R}} \text{ tel que } \ell_G = \lim_{x \to +\infty} G(x)}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En intégrant l'encadrement de la question 7, il vient

$$\int_0^x te^{-4t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant G(x) \leqslant \int_0^x te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^x te^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{2}\int_0^x -2te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^x \\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{-x^2} - 1\right)\end{aligned}$$

Et, de même,

$$\int_0^x te^{-4t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{8}\int_0^x -8te^{-4t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{8}\left(e^{-4x^2}-1\right)$$

Par conséquent l'encadrement s'écrit

$$\frac{1}{8}\left(1-e^{-4x^2}\right) \leqslant G(x) \leqslant \frac{1}{2}\left(1-e^{-x^2}\right)$$

Ainsi, $G(x) \leqslant \frac{1}{2}\left(1-e^{-x^2}\right) \leqslant \frac{1}{2}$, donc est majorée : $\ell_G \in \mathbb{R}$.
En passant à la limite dans l'encadrement (*chaque* membre a une limite finie en $+\infty$),

$$\boxed{\frac{1}{8} \leqslant \ell_G \leqslant \frac{1}{2}}$$