

Épreuve de Mathématiques 2

Correction

4

Exercice 1 (CAPES)

A. Intégrales de Wallis *cette partie est extrêmement classique, donc à connaître.*

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Soit $n \geqslant 0$. On effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u$.
Donc $\cos(t) = \cos(\pi/2 - u) = \sin(u)$ et $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$.

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n u(-1)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \,\mathrm{d}u$$

Remarque : t est une variable *muette*, comme k dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$. Elle n'existe qu'entre $\displaystyle\int$ et $\mathrm{d}t$.

Ainsi on peut réutiliser cette variable un peu plus loin : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$

Conclusion : $\boxed{W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t}$

b) $\boxed{W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\cos^n t \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$.
Supposons que $W_n = 0$. Puisque $t \mapsto \cos^n t$ est continue, alors $\cos^n t = 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, ce qui est absurde (par exemple $\cos 0 = 1$).
Ainsi, $\boxed{W_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

c) Soit $n \geqslant 2$. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) \times (\cos^{n-1} t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[(\sin t) \times (\cos^{n-1} t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)\Big(-(n-1)(\sin t)(\cos^{n-2} t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(\cos^{n-2} t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)\cos^{n-2} t \,\mathrm{d}t \\
&= (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\boxed{nW_n = (n-1)W_{n-2}.}$

d) Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = nW_nW_{n-1}$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = (nW_n)W_{n-1} = (n-1)W_{n-2}W_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = u_{n-1}$$

La suite $(u_n)_n$ est donc géométrique de raison 1 et de premier terme $u_1 = W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $\boxed{\text{La suite } u_n = nW_nW_{n-1} \text{ est constante de valeur } \frac{\pi}{2}.}$

2) **a)** Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \cos t \leqslant 1$$

Donc pour tout $n \geqslant 0$, $\cos^n t \geqslant 0$ et

$$0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$$

En intégrant cet encadrement, il vient $W_{n+1} \leqslant W_n$, c'est-à-dire $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$
Soit $n \geqslant 2$. D'après 1)c), $nW_n = (n-1)W_{n-2}$. Ainsi, puisque (W_n) est décroissante,

$$\frac{n-1}{n} W_{n-1} \leqslant \frac{n-1}{n} W_{n-2} = W_n \leqslant W_{n-1}$$

Puisque $W_k > 0$ d'après 1)b), il reste à diviser par W_{n-1} et constater que l'inégalité est vraie en $n = 1$: $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ \frac{n-1}{n} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1.}$

b) D'après la question précédente, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = 1$. Ainsi,

$$\boxed{W_n \sim W_{n-1}}$$

Rappel : Pour des suites non nulles au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

c) D'après 1)d), $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $W_{n-1} = \frac{\pi}{2nW_n}$ ($W_n \neq 0$) et l'équivalent précédent s'écrit :

$$W_n \sim \frac{\pi}{2nW_n}$$

Donc, $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ et, comme $W_n > 0$,

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

B. Formule de Stirling

1) **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}} \frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n} = \frac{n^n\sqrt{n}}{(n+1)^n\sqrt{n+1}} e = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e$$

Donc $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e}$

b) Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$, d'après 1)a)

$$v_n = \ln\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} e\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1$$

Finalement : $\boxed{v_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1}$

Comme on ne précise pas la formule à obtenir, du moment que vous avez simplifié les factorielles et un peu débroussaillé le reste, ça va. Le but est de faciliter l'obtention du DL à la question suivante.

c) Le développement de $\ln(1-u)$ en 0 est $\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$.

Un peu de tactique : si on vous le demande à l'ordre 3, c'est sans doute qu'il sert à l'ordre 3. Et non 2.

d) Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
v_n &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+1\\
&= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)+1\\
&= -1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+1+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= -\frac{1}{12n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{v_n = -\frac{1}{12n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}$

e) D'après la question précédente, $|v_n| \sim \frac{1}{12}.\frac{1}{n^2}$.

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$).

Ainsi, par équivalent, la série $\sum v_n$ est absolument convergente donc convergente.

Conclusion : $\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ est convergente}}$

f) La série $\sum v_n$ est télescopique : $\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n}(\ln u_k - \ln u_{k-1}) = \ln u_n - \ln u_1 = (\ln u_n) - 1$.

Or cette série converge, donc $\boxed{(\ln u_n)_n \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}}$

Par continuité de la fonction exponentielle, $\boxed{\text{la suite } u_n = e^{\ln(u_n)} \text{ converge donc aussi}}$, et sa limite est $K = e^{\ell} > 0$.

Comme $K > 0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = K$ peut s'écrire $u_n \sim K$, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim K$$

La compatibilité des équivalent avec le produit nous donne

$$\boxed{n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}$$

2) **a)** Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(p) : \quad W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

est vraie pour tout $p \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ D'après 1)b), $W_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{(2^0 0!)^2}\frac{\pi}{2}$, donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(p)$ vraie : $W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)} = W_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} && \text{(d'après 1)c))}\\
&= \frac{2p+1}{2p+2}\times\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2(p+1))^2}\times\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall p \geqslant 0 \qquad W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}}$

D'après 1)d), pour tout $p \geqslant 0$, $W_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(2p+1)W_{2p}}$. Ainsi

$$W_{2p+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2p+1} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!}\frac{2}{\pi} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

b) D'après B.1)e),

$$p! \sim K p^p e^{-p}\sqrt{p} \qquad \text{et} \qquad (2p)! \sim K 2p^{2p} e^{-2p}\sqrt{2p}$$

Donc d'après B.2)a)

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{K(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}}{(2^p K p^p e^{-p}\sqrt{p})^2}\frac{\pi}{2} = \frac{K}{K^2} \times \frac{2^{2p}}{2^{2p}} \times \frac{p^{2p+1/2}}{p^{2p+1}} \times \frac{e^{-2p}}{e^{-2p}} \times \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

c) D'après B.2)b), $W_{2p} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$. De plus, d'après A.2)b), $W_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$.

Donc, par transitivité, $\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$, et ainsi $\boxed{K = \sqrt{2\pi}}$

En conclusion,

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

C'est ce qu'on appelle la formule de Stirling. *Elle est à votre programme : le résultat est du cours.*

Exercice 2

1) a) *Remarque préliminaire : j est une racine 3-ième de l'unité, c'est-à-dire une solution de $X^3 = 1$ ($\boxed{j^3 = 1}$). Cette équation s'écrit aussi $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1) = 0$. Puisque $j \neq 1$, j est forcément racine de X^2+X+1 (pour que le produit soit nul) : $\boxed{j^2+j+1=0}$.* Soit $p \in \mathbb{N}$.

- <u>$k = 3p$</u> : $j^k = (j^3)^p = 1$ donc $S(3p) = 3$.
- <u>$k = 3p+1$</u> : $S(3p+1) = 1 + (j^3)^p j + (j^3)^{2p} j^2 = 1 + j + j^2 = 0$.
- <u>$k = 3p+2$</u> : $S(3p+2) = 1 + (j^3)^p j^2 + (j^3)^{2p} j^4 = 1 + j^2 + j^3 j = 1 + j^2 + j = 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad S(3p) = 3 \text{ et } S(3p+1) = S(3p+2) = 0}$

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de la forme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$$P(X)+P(jX)+P(j^2X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n} a_k j^k X^k + \sum_{k=0}^{n} a_k (j^2)^k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(1 + j^k + (j^2)^k\right) X^k$$

On pose $N = E(n/3)$, la partie entière de $n/3$ (donc $n = 3N$, $n = 3N+1$ ou $n = 3N+2$). D'après le résultat de la question 1)a), $\boxed{P(X)+P(jX)+P(j^2X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k S(k) X^k = \sum_{p=0}^{N} 3a_{3p}X^{3p}}$.

2) a) $R_k(X) = (X-k)(jX-k)(j^2X-k) = X^3 - k(1+j+j^2)X^2 + k^2(1+j+j^2)X - k^3 = X^3 - k^3$

(Sans calculs : les racines de $R_k(X)$ sont k, jk et j^2k, c'est-à-dire exactement les solutions de $X^3 = k^3$, donc $R_k(X) = \alpha(X^3 - k^3)$.)

b) $T = R_1R_2R_3R_4$, où R_k est le polynôme de la question précédente. Comme R_k est un polynôme en X^3, $\boxed{T \text{ est un polynôme en } X^3}$.

Surtout, éviter de développer le polynôme T de degré 12...

c) $T = R_1R_2R_3R_4$ donc $T(X) = (X^3-1)(X^3-2^3)(X^3-3^3)(X^3-4^3)$.
Ainsi, avec $\boxed{H(Y) = (Y-1)(Y-2^3)(Y-3^3)(Y-4^3)}$, $H(X^3) = T(X)$.
Les racines de H sont 1, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ et $4^3 = 8^2 = 64$.

d) Méthode directe :

$$\begin{aligned} T(X)=0 &\iff Q(X)=0 \quad \text{ou} \quad Q(jX)=0 \quad \text{ou} \quad Q(j^2X)=0 \\ &\iff X = 1,2,3 \text{ ou } 4 \quad \text{ou} \quad jX = 1,2,3 \text{ ou } 4 \quad \text{ou} \quad j^2X = 1,2,3 \text{ ou } 4 \quad \text{ou} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \bar{j} = j^2$, et $\dfrac{1}{j^2} = j$, donc en divisant par j et par j^2 les équations ci-dessus, on trouve que les racines de T sont

$$\boxed{\{1,2,3,4,j^2,2j^2,3j^2,4j^2,j,2j,3j,4j\}}$$

Seconde méthode : D'après 2)c), $T(X) = H(X^3)$, donc

$$T(X)=0 \iff H(X^3)=0 \iff X^3 = 1, 2^3, 3^3 \text{ ou } 4^3$$

En résolvant chacune des équations $X^3 = a$ ci-dessus, on trouve

$$\boxed{\{1,j,j^2,2,2j,2j^2,3,3j,3j^2,4,4j,4j^2\}}$$

Exercice 3 (CNM TSI 2017) **1)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les intégrales de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ se calculent par IPP, en dérivant jusqu'à ce que mort du polynôme P s'en suive.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\left[\left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\left(-\frac{\sin(kx)}{k}\right)\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k}\left[\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\frac{\cos(kx)}{k})\right]_0^\pi - \frac{1}{k^2}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}[-\sin(kx)/(k\pi)]_0^\pi \\ &= \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

2) *Les exercices classiques vu en cours doivent être connus.* Soit $x \in]0,\pi]$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ix})^k \\ &= e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} \qquad \text{(car } x \neq 0\text{, donc } e^{ix} \neq 1) \\ &= e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}(e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}})}{e^{\frac{ix}{2}}(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}})} \\ &= e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Donc, par linéarité de la partie réelle,

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \Re\left(\sum_{k=1}^n e^{ikx}\right) = \Re\left(e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}}$$

3) Cf. exercice.

4) **a)** Prenons un équivalent de g en 0^+ :

$$\frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin(x/2)} \sim \frac{-x}{2\frac{x}{2}} = -1$$

Donc g est continue en 0. De plus, g est continue sur $[0,\pi]$ comme composée de fonctions continues. En conclusion,

$$\boxed{g \text{ est continue sur } [0,\pi]}$$

b) Pour tout $x \in]0,\pi]$, g est $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonction $\mathscr{C}^1$, et

$$g'(x) = \frac{(\frac{x}{\pi}-1)(2\sin(x/2)) - (\frac{x^2}{2\pi}-x)\cos(x/2)}{(2\sin(x/2))^2}$$

<u>Étude en 0</u> : Utilisons le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$. *(Avec les DL, il ne vous arrivera jamais de mésaventure. À condition d'être soigneux : le dernier $o(x)$ de la première ligne est fondamental.)*
Cherchons la limite de g' en 0^+ :

$$\begin{aligned}
(\frac{x}{\pi}-1)(2\sin(\frac{x}{2})) - (\frac{x^2}{2\pi}-x)\cos(\frac{x}{2}) &= (\frac{x}{\pi}-1)2(\frac{x}{2}+o(x)) - (\frac{x^2}{2\pi}-x)(1+o(x)) \\
&= -x + x^2/\pi - x^2/(2\pi) - x + o(x^2) \\
&= x^2/(2\pi) + o(x^2) \\
&\sim x^2/(2\pi)
\end{aligned}$$

Or $(2\sin(x/2))^2 \sim x^2$, donc $g(x) \sim \dfrac{x^2/(2\pi)}{x^2} = \dfrac{1}{2\pi}$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ existe et est finie, donc, comme g est continue sur $[0,\pi]$, **d'après le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$**,

$$\boxed{g \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\pi]}$$

5) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 1),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\,\mathrm{d}x && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\frac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x && \text{(d'après 2)} \\
&= = \int_0^{\pi} 2\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)g(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

De plus, $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b)+\sin(a-b)$, donc

$$2\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2) = \sin((2n+1)x/2) + \sin(-x/2)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= \int_0^{\pi} (\sin((2n+1)x/2) - \sin(x/2))g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{x^2}{2\pi} - x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} g(x)\sin\Big(\frac{(2n+1)x}{2}\Big)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{x^2}{2\pi} - x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{6}$. Conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\mathrm{d}x}$$

L'idée est toujours la même : souvent, on ne voit pas a priori *pourquoi on obtient ce résultat. Il faut se laisser porter par les questions du sujet – où a-t-on calculé* $\sum \frac{1}{k^2}$ *? On cherche toujours un stylo à la main, et non les yeux dans le vague.*

b) D'après 4)b), g est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Donc d'après 3), avec $m = (2n+1)/2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\psi = g$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\mathrm{d}x = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE