

Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

A. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

- 1) a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$$

(cette question est indépendante des suivantes).

- b) Calculer W_0 et W_1 et justifier que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

Rappel : $\sin^2 = 1 - \cos^2$.

- d) En déduire que la suite $(nW_n W_{n-1})_{n \geq 1}$ est constante de valeur $\frac{\pi}{2}$.

- 2) a) Montrer que la suite (W_n) est décroissante et que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1$$

- b) Montrer que $W_n \sim W_{n-1}$.

- c) En déduire un équivalent de W_n .

B. Formule de Stirling

On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie, pour $n \geq 2$, par $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$.

- 1) a) Simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

- b) Exprimer simplement v_n en fonction de n .

- c) Rappeler le développement limité de $\ln(1-u)$ à l'ordre 3 en $u = 0$.

- d) Donner un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$ de la suite $(v_n)_n$.
- e) En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente.
- f) En déduire que les suites $(\ln u_n)_n$ et $(u_n)_n$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$n! \sim K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

- 2) a) En utilisant la question A1)c), montrer que $W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$. En déduire W_{2p+1} en fonction de p .
- b) Déterminer un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_p$ à l'aide de l'équivalent de $n!$ trouvé précédemment.
- c) En déduire la valeur de K , et, par suite, un équivalent de $n!$.

Exercice 2

Soit le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

- 1) a) Calculer pour $k = 3p$, $k = 3p + 1$ et $k = 3p + 2$, où $p \in \mathbb{N}$, la valeur de la somme

$$S(k) = 1 + j^k + (j^2)^k$$

- b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficient complexes, de la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Calculer $P(X) + P(jX) + P(j^2X)$, on exprimera le résultat en fonction des coefficients a_k de P .

Indication : On pourra éventuellement distinguer les différents cas : $n = 3N$, $n = 3N + 1$ et $n = 3N + 2$.

- 2) a) Soit $k \in \mathbb{C}$. Développer et simplifier le polynôme

$$R_k(X) = (X - k)(jX - k)(j^2X - k)$$

- b) Soit le polynôme $Q(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$. On lui associe le polynôme $T(X) = Q(X)Q(jX)Q(j^2X)$. Montrer que T est un polynôme en X^3 .
- c) En posant $Y = X^3$, déterminer un polynôme H tel que $H(Y) = T(X)$. Déterminer les racines du polynôme $H(Y)$.
- d) Déterminer de deux façons différentes les racines du polynôme T .

Exercice 3

- 1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x \right) \cos(kx) \, dx = \frac{1}{k^2}$$

- 2) Soit $x \in]0, \pi]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin(nx/2) \cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

- 3) Soit ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \psi(x) \sin(mx) \, dx = 0$.

- 4) Soit $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0, \pi], \quad g(x) = \frac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2 \sin(x/2)} \quad \text{et} \quad g(0) = -1$$

- a) Montrer que g est continue sur $[0, \pi]$.
b) Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
5) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi 2 \sin(nx/2) \cos((n+1)x/2) g(x) \, dx = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \, dx$$

- b) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

FIN DE L'ÉPREUVE