# Épreuve de Mathématiques 1

Correction

---

## Exercice 1 (ATS 2022, extrait)

**1)** Notons $f : t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}\,(t)}{t}$.

**a)** La fonction $f$ est définie lorsque le dénominateur est non, donc

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*}$$

**b)** Comme $f(t) = \dfrac{\text{Arctan}\,(t)}{t} \sim_0 \dfrac{t}{t} = 1$,

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\text{Arctan}\,(t)}{t} = 1}$$

**c)** La fonction $f$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

**2)** Majoration :

$$\begin{aligned}
&\forall t \in [0,1], && 0 \leqslant t \leqslant 1 \\
\Longrightarrow\ &\forall t \in [0,1], && 0 < 1 \leqslant 1 + t^2 \\
\Longrightarrow\ &\forall t \in [0,1], && 0 < \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1 && \text{Car } u \mapsto 1/u \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
\Longrightarrow\ &\forall t \in [0,1], && 0 < \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leqslant t^{2n} && \text{Car } t^{2n} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|r_n(x)| &\leqslant \int_0^x \left|\frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t && \text{Par croissance de l'intégrale}
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad |r_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

**3)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$. Comme $q = -t^2 \leqslant 0$, $q \neq 1$ et la série géométrique s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{2k} &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} \\ &= \frac{1-(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{2k} = \frac{1-(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}}$$

Soit $x \in [0,1]$, posons $g(x) = x s_n'(x)$.

$$\begin{aligned}s_n'(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k+1} \\ \Longrightarrow x s_n'(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \\ \Longrightarrow g'(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{2k} && \text{En dérivant l'expression précédente} \\ \Longrightarrow g'(x) &= \frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} && \text{D'après ci-dessus}\end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et $x$ l'expression précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t = g(x) - g(0) &= x s_n'(x) \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} - \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{Arctan}(x) - r_n(x)\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{x s_n'(x) = \operatorname{Arctan}(x) - r_n(x)}$$

**4)** Ainsi, d'après ci-dessus,

$$\forall t \in ]0,1], \qquad s_n'(t) - \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} = -\frac{r_n(t)}{t}$$

Le membre de gauche étant prolongeable par continuité en 0, celui de droite l'est aussi *(après le chapitre d'intégration, cette justification ne sera plus nécessaire)*, et nous pouvons intégrer sur $[0,1]$.
Donc, par croissance de l'intégrale,

$$s_n(1) - s_n(0) - I = -\int_0^1 \frac{r_n(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Comme $s_n(0) = 0$, en passant aux valeurs absolues, il vient

$$\begin{aligned}|s_n(1) - I| &= \left|\int_0^1 \frac{r_n(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{r_n(t)}{t}\right|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, d'après la question 2, pour tout $t \in ]0,1]$, $\dfrac{r_n(t)}{t} \leqslant \dfrac{t^{2n}}{2n}$. Comme $\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}$,

$$\boxed{|s_n(1) - I| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{r_n(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(2n+1)^2}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = 0$, donc, par majoration,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n(1) = I}$$

## Exercice 2 (X-ENS MP, 2024, extrait)

**1)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que $(u_n)$ converge vers $\ell$.

- Supposons que $\ell = 0$ : Par définition de la convergence de $(u_n)$ vers 0,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ qui convient.

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant n_0, \quad |\sigma_n| &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |u_k| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + \sum_{k=n_0}^{n} \underbrace{|u_k|}_{\leqslant \varepsilon}\right] && \text{Par définition de } n_0 \\
&\leqslant \frac{A}{n+1} + \frac{n-n_0+1}{n+1}\varepsilon && \text{Avec } A = \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| \text{ constant par rapport à } n
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{A}{n+1} = 0$, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $0 \leqslant \dfrac{A}{n+1} \leqslant \varepsilon$. Soit $n_1$ qui convient.

$$\forall n \geqslant n_1, \quad |\sigma_n| \leqslant \varepsilon + \frac{n-n_0+1}{n+1}\varepsilon \leqslant 2\varepsilon \qquad \text{Car } n - n_0 + 1 \leqslant n+1$$

Ainsi, nous venons de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_1,\ |\sigma_n| \leqslant 2\varepsilon$$

C'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = 0$$

- Cas général : Posons $u'_n = u_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u'_n = 0$, et d'après ci-dessus,

$$\sigma'_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u'_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Or, } \forall n \in \mathbb{N},\ \sigma'_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell) && \text{D'où } \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell. \\
&= \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - \frac{n+1}{n+1}\ell \\
&= \sigma_n - \ell
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell\right)}$$

**2)** • Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ : Par définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$,

$$\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A$$

Soit $A > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ qui convient.

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} \underbrace{u_k}_{\geqslant A}\right] \qquad \text{Par définition de } n_0$$

$$\geqslant \frac{C}{n+1} + \frac{n-n_0+1}{n+1}A \qquad \text{Avec } C = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \text{ constant par rapport à } n$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{C}{n+1} + \dfrac{n-n_0+1}{n+1}A = A$.

*Là aussi, on adapte $|v_n - A| \leqslant \varepsilon$ : quel $\varepsilon$ prendre ? Ce qui joue le rôle de $\varepsilon$ dans le calcul général, c'est $A$. Et on veut que $v_n = \dfrac{C}{n+1} + \dfrac{n-n_0+1}{n+1}A$ soit minoré par $A$, ou, à défaut, $A/2$ ou une fraction de $A$.*

Avec $\varepsilon = A/2$, il existe $n_1$ tel que, $\forall n \geqslant n_1$,

$$A - \frac{A}{2} \leqslant \frac{C}{n+1} + \frac{n-n_0+1}{n+1}A \leqslant A + \frac{A}{2}$$

Soit $n_1 \geqslant n_0$ qui convient :

$$\forall n \geqslant n_1, \quad \sigma_n \geqslant \frac{C}{n+1} + \frac{n-n_0+1}{n+1}A \geqslant \frac{A}{2}$$

Ainsi, nous venons de montrer que

$$\boxed{\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty\right)}$$

*Cette preuve n'est pas évidente. Il faut se laisser guider par ce que vous savez faire : le cas $\ell \in \mathbb{R}$. On reprend la preuve, et on essaye d'adapter au cas $\ell = +\infty$. Ligne par ligne.*

• Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ : *Toujours éviter de refaire une démonstration déjà faite : utilisez plutôt le résultat que vous venez de prouver. En modifiant votre objet pour qu'il vérifie les hypothèses précédentes.*

Comme $(-u_n)$ a pour limite $+\infty$, d'après ci-dessus $(-\sigma_n) = \left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} -u_k\right)$ a pour limite $+\infty$.

Ainsi,

$$\boxed{\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = -\infty\right)}$$

*En plus, vous pouvez déduire le cas $-\infty$ en vous contentant d'admettre le cas $+\infty$.*

**Applications**

**3)** **a)** Posons $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sigma_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = v_{n+1}$. D'après le théorème de Cesàro,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

**b)** *C'est un classique, que nous reverrons. Un équivalent s'obtient par un DL, ou bien en revenant à la définition : $u_n \sim v_n \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Et une limite s'obtient par encadrement (ou équivalent ou DL, mais on l'aurait trouvé à l'étape précédente).*

Par décroissance de $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [k, k+1], \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

$$\implies \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k} \quad \text{(croissance de } \int\text{)}$$

$$\implies \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\implies \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant nv_n$$

$$\implies \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad (n+1)v_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant nv_n$$

*(On rajoute le terme manquant pour faire apparaître $v_{n+1}$).*

$$\implies \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} nv_n - 1 \leqslant \ln(n) \\ \ln(n+1) \leqslant nv_n \end{cases}$$

*(On décale les indices à gauche. Écrire les inégalités pour $n = 1, 2, 3, 4$ pour comprendre).*

$$\implies \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \ln(n+1) \leqslant nv_n \leqslant \ln(n) + 1$$

$$\implies \qquad \forall n \geqslant 2, \qquad \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{n}{\ln(n)} v_n \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Or $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + 1/n) = \ln(n) + o(1)$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} = 1$.

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln(n)} v_n = 1$, et

$$\boxed{v_n \sim \frac{\ln(n)}{n}}$$

**4)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \alpha$.

**a)** *Simplifier une somme : télescopique, ou géométrique ?*
C'est une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n} e_k = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$$

**b)** Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \alpha$. Donc, d'après le théorème de Cesàro, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} e_k = \alpha$ :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} e_k = \alpha + o(1)$$

Or $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} e_k = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} - \dfrac{u_0}{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} + o(1)$, car $\left(\dfrac{u_0}{n+1}\right)$ est de limite nulle.
Donc l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} e_k + o(1) = \alpha + o(1)$$

Or $\alpha \neq 0$, donc, en décalant les indices ( $\lim_{n\to+\infty} u_n/n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/(n+1) = \alpha$)

$$\frac{u_n}{n} \sim \alpha$$

Ainsi,

$$\boxed{u_n \sim \alpha n}$$

**5)** *Dans cette question, nous avons des quotient ou des racines n-ième, alors qu'il était question de sommes. De plus, les termes sont strictement positifs : le logarithme nous tend les bras, qui va transformer les produits en sommes, etc.*

**a)** Posons $u'_n = \ln u_n$, bien défini car $u_n > 0$. Par continuité de ln, et comme $\ell > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} (u'_{n+1} - u'_n) = \ln \ell$$

D'après Cesàro, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u'_{k+1} - u'_k) = \ln \ell$.

La somme étant télescopique, et comme, de même qu'au 4b, $\frac{u'_0}{n} = o(1)$, il vient $\lim_{n\to+\infty} \frac{u'_n}{n} = \ln \ell$.
Par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell}$$

**b)** *« En déduire » : vous pouvez toujours voir si vous réussissez à appliquer le résultat de la question précédente – i.e. vérifier les hypothèses pour le bon $u_n$. Même si vous n'avez pas su faire la question précédente.*

Posons $u_n = \frac{n^n}{n!} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- Limite de $(u_{n+1}/u_n)$ : Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)!\, n^n} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1) n^n} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= e^{n \ln(1+1/n)}
\end{aligned}$$

Or $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$, donc, par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e$$

- Conclusion : D'après 5a,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e}$$

**c)** Avec les notations de la question 5a.
Le cas $\ell = 0$ correspond au cas $\ell = -\infty$ de Cesàro, prouvé au 2. Comme $u'_0/n = o(1)$, $(u'_n/n)$ diverge vers $-\infty$, puis

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0 = \ell$$

Le cas $\ell = +\infty$ correspond au cas $\ell = +\infty$ de Cesàro, et se traite de même. Ainsi,

Le résultat de la question 5a subsiste si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$.

**d)** Posons $u_n = n!$. Comme $u_{n+1}/u_n = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, le cas $\ell = +\infty$ de la question 5a nous donne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty}$$

**6)** • Supposons $a = b = 0$ : *C'est sans doute la question la plus délicate de l'exercice, ne pas hésiter à la laisser pour la fin.*

Posons $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|a_n| \leqslant \varepsilon$ et $|b_n| \leqslant \varepsilon$. Soit $n_0$ qui convienne.

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 2n_0, \quad |v_n| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| \\
&\leqslant \frac{1}{n}\left[\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k||b_{n-k}|}_{(\star)} + \sum_{k=n_0}^{n} \underbrace{|a_k|}_{\leqslant\varepsilon} |b_{n-k}|\right]
\end{aligned}$$

Pour $(\star)$, comme $k < n_0$ et $n \geqslant 2n_0$, alors $n - k \geqslant 2n_0 - n_0 = n_0$ : $|b_{n-k}| \leqslant \varepsilon$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left[\varepsilon \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k| + \varepsilon \sum_{k=n_0}^{n} |b_{n-k}|\right]$$

Or $\forall n \geqslant 2n_0$, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} |b_{n-k}| = \sum_{k=0}^{n-n_0} |b_k|$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} |b_k|}_{=A} + \sum_{k=n_0}^{n-n_0} \underbrace{|b_k|}_{\leqslant\varepsilon} \quad \text{Avec } A \text{ constante par rapport à } n$$

D'où, avec $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k|$ constante par rapport à $n$ aussi,

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 2n_0, \quad |v_n| &\leqslant \frac{1}{n}\left[\varepsilon B + \varepsilon A + \varepsilon \sum_{k=n_0}^{n-n_0} \varepsilon\right] \\
&\leqslant \frac{(A+B)\varepsilon}{n} + \frac{n - 2n_0 + 1}{n}\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Avec $\varepsilon < 1$ (que l'on peut imposer sans perte de généralité), et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(A+B)\varepsilon}{n} = 0$, il vient l'existence de $n_1 \geqslant 2n_0$ tel que

$$\forall n \geqslant n_1, \quad |v_n| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = 0$$

- Cas général : Posons $a'_n = a_n - a$ et $b'_n = b_n - b$. En remplaçant,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(a+a'_k)(b+b'_{n-k}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} ab + a'_k b + ab'_{n-k} + a'_k b'_{n-k} \\ &= \frac{n}{n}ab + \frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n} a'_k + \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n} b'_{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a'_k b'_{n-k}\end{aligned}$$

Or, d'après Cesàro, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} a'_k = \lim\limits_{n\to+\infty} a'_n = 0$.

Et, après changement d'indice, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} b'_{n-k} = \lim\limits_{n\to+\infty} b'_n = 0$.

De plus, d'après ci-dessus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} a'_k b'_{n-k} = 0$.

Donc, en conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = ab}$$

**Réciproques partielles**

**7)** Posons $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1 \neq -1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$, la suite $(u_n)$ ne converge pas.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \sigma_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^{2k} + (-1)^{2k+1}\right] = 0 \\ \sigma_{2n} = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k = \frac{1}{2n}\underbrace{\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k}_{=0} + 1 = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$.

Comme les suites extraites des termes pairs et impairs ont la même limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = 0$. Ainsi,

| La réciproque du théorème de Cesàro n'est pas toujours vraie |
|---|

*Preuve de : Si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ ont une même limite $\ell$, alors $(u_n)$ converge.*
*Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.*
*Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

*Soit $n \geqslant 2n_0 + 1$. Si $n = 2p+1$ est impair, alors $p \geqslant n_0$ et $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.*
*Sinon, $n = 2p$ est pair, et $p > n_0$, donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.*
*Ainsi, $\forall n \geqslant 2n_0 + 1$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. En conclusion*

$$\boxed{(u_n) \text{ converge}}$$

**8)** Soit $(u_n)$ une suite monotone telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \in \mathbb{R}$.

Quitte à considérer $(-u_n)$, on suppose $(u_n)$ croissante.
D'après le théorème de la limite monotone, si $(u_n)$ est majorée, alors elle converge. Et si $(u_n)$ n'est pas majorée, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Dans les deux cas, le théorème de Cesàro nous dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Nous venons de prouver que

$$\boxed{\left(\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\ell \quad \text{et} \quad (u_n) \text{ monotone}\right)\Longrightarrow\left(\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell\right)}$$

**9)** Théorème de Hardy faible.

**a)** Soit $n\geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}ke_k&=\sum_{k=0}^{n}\Big[ku_{k+1}-ku_k\Big]\\&=\sum_{k=0}^{n}ku_{k+1}-\sum_{k=0}^{n}ku_k\\&=\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)u_k-\sum_{k=1}^{n}ku_k \qquad \text{Décalage d'indices, et } 0\times u_0=0\\&=nu_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\Big[(k-1)u_k-ku_k\Big]\\&=nu_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}u_k\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\quad \sum_{k=0}^{n}ke_k=nu_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}u_k}$$

*Toujours la même idée : télescopique ? Télescopique ! (décalage d'indices, ce qui est la même chose).*

**b)** *Il y a une question a : se laisser porter par cette indication.*

Supposons que $\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\ell$ et que $e_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$. Soit $n\geqslant 1$. D'après a), en divisant par $n$,

$$u_{n+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}ke_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k$$

Or $ke_k=o(1)$, c'est-à-dire $\lim_{k\to+\infty}ke_k=0$. Donc le théorème de Cesàro (appliqué à $u'_n=(n+1)e_{n+1}$) nous donne

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}ke_k=0$$

De plus, $(u_n)$ converge vers $\ell$, donc le théorème de Cesàro (appliqué à $u'_n=u_{n+1}$) nous donne

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k=\ell$$

Ainsi, $(u_{n+1})$ converge vers $0+\ell$. Finalement,

$$\boxed{\left(\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\ell \quad \text{et} \quad e_n=o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\Longrightarrow\left(\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell\right)}$$

## Exercice 3 (E3A 2007, PC, partiel, et EMLyon 2009)

### A. Étude de la fonction $f$

**1)** Étude de $f$ en 0.

**a)** $e^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$ donc

$$\begin{aligned}\frac{x}{e^x-1} &= \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)} \\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) \qquad \text{Car } \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\end{aligned}$$

**b)**

- Continuité en 0 : Montrons que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}f(x) - f(0) &= \frac{x}{e^x-1} - 1 \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2) \\ &= o(1)\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ :

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0}$$

- Dérivabilité en 0 : Montrons que l'on peut déduire du DL $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, la limite du taux d'accroissement. Pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}f(x) - f(0) &= \frac{x}{e^x-1} - 1 \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2) \\ &= -\frac{1}{2}x + o(x)\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{1}{2}$ :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = -\frac{1}{2}}$$

- On ne peut rien déduire de plus : la fonction $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas $\mathscr{C}^1$. Cf l'exercice sur le sujet dans la feuille « fonctions d'une variable réelle ».

**c)** La fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} \\ &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x(1 + x + o(x))}{(e^x-1)^2} \\ &\sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} \qquad \text{Dénominateur : } e^x - 1 \sim x \\ &= -\frac{1}{2} = f'(0)\end{aligned}$$

Donc $f'$ est continue en 0, et $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**d)** Équation de la tangente $T$ à $(C)$ au point d'abscisse 0 : $y = 1 - \frac{1}{2}x$.

D'après la question A.1)a), $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$.

Puisque $\frac{1}{12}x^2 > 0$ pour tout $x$ dans un voisinage de 0, la courbe est au-dessus de la tangente.

**2)** Variations de $f$.

**a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$. Donc $g'$ est du signe de $x$ et il vient

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |
| signe de $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

- $g(x) = (x-1)e^x + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ par produit.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

**b)** D'après le calcul de la question A.1)c), $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$. Donc $f'$ est du signe de $-g$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, d'après A.1)b), $f'(0) < 0$. En conclusion, $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$ et $f$ strictement décroissante.

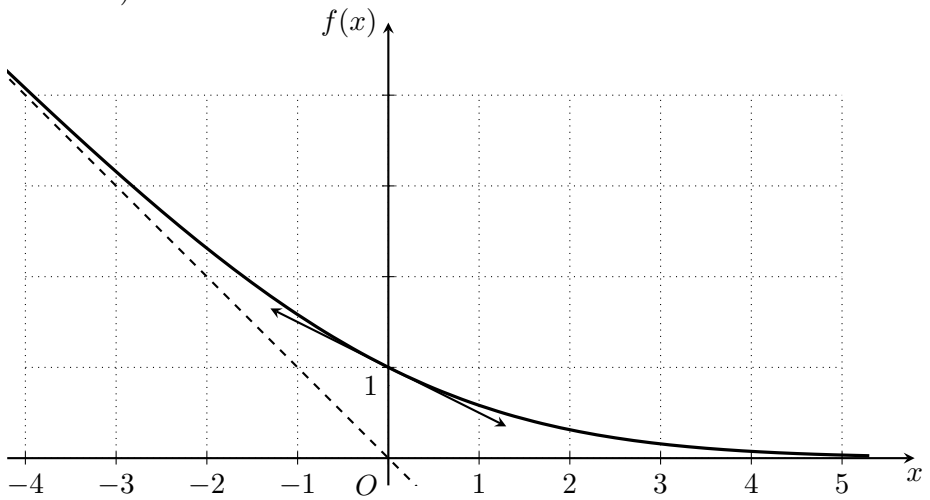
**c)** Au voisinage de $+\infty$ : $f(x) \sim \dfrac{x}{e^x} \to 0$ et $f > 0$ donc $(C)$ admet une asymptote d'équation $y = 0$ et est au-dessus de celle-ci.

Au voisinage de $-\infty$ : $u = e^x \to 0$ lorsque $x \to -\infty$ donc

$$f(x) = -x\left(\frac{1}{1-e^x}\right) = -x - xe^x + o(xe^x)$$

Ainsi $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, de plus $(C)$ admet une asymptote d'équation $y = -x$ et est au-dessus de celle-ci (car $-xe^x > 0$).

**d)**




**B. Étude d'une suite récurrente associée à la fonction $f$.**

**1)** Cherchons les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(\alpha) = \alpha$.

$f(0) = 1 \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$, et $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^\alpha - 1}$.

$$f(\alpha) = \alpha \iff \frac{1}{e^\alpha - 1} = 1 \iff e^\alpha = 2 \iff \alpha = \ln(2)$$

La fonction $f$ admet don un unique point fixe, $\alpha = \ln(2)$.

**2)** **a)** Pour tout $x \in [0, +\infty[$, posons $\varphi(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.
La fonction $\varphi$ est $\mathscr{C}^\infty$ et $\varphi'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2(e^x - 1 - x)e^x$. En dérivant $x \mapsto e^x - 1 - x$ on montre que cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $e^x - 1 - x \geqslant e^0 - 1 - 0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi $\varphi' \geqslant 0$ et $\varphi$ est croissante, donc $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ :

$$\forall x \in [0, +\infty[ \qquad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$$

(on peut aussi astucieusement factoriser par $e^x$, et l'expression s'étudie beaucoup plus rapidement)

**b)** Soit $x \in ]0, +\infty[$, d'après la question précédente

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \geqslant 0$$

**c)** $f'(0) = -\dfrac{1}{2} \in [-1/2, 0[$. D'après A.2)a), $f' < 0$, et d'après la question précédente, $f' \geqslant -1/2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En conclusion

$$\forall x \in [0, +\infty[ \qquad -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$$

**d)** Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f$ est continue et dérivable entre $u_n$ et $\alpha$, donc l'inégalité des accroissements finis s'écrit

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant (\sup_{x \in I} |f'(x)|)|u_n - \alpha|$$

Où $I$ est l'intervalle de bornes $u_n$ et $\alpha$. Puisque $\sup\limits_{x \in I} |f'(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} |f'(x)| = \dfrac{1}{2}$ d'après c),

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

**3)** Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|1 - \alpha|$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$ : Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Donc, d'après la question précédente, il vient

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|1 - \alpha|$$

Et $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$ : $\forall n \geqslant 0 \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1 - \alpha|$

**4)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha = \ln 2$.

**FIN DE L'ÉPREUVE**