Lycée St Joseph Lundi 9 septembre 2024
Classe de PC

Épreuve de Mathématiques 1

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Dans cette partie on étudie l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

dont on cherche à donner une approximation. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on définit

$$r_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

1) Notons $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t}$.

a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t}$.

c) Notons aussi f le prolongement par continuité de f à $\mathscr{D}_f \cup \{0\}$. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Par abus de notation (pour l'instant), on admet que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}\,(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

2) Établir pour tout réel $x \in [0,1]$ la majoration

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

3) Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel t de $[0,1]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{2k} = \frac{1-(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}.$$

En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x de $[0,1]$ l'égalité suivante :

$$x s_n'(x) = \operatorname{Arctan}(x) - r_n(x).$$

4) Écrire le nombre $s_n(1) - I$ à l'aide d'une intégrale puis montrer que

$$|s_n(1) - I| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{r_n(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n(1)$ en fonction d'une intégrale.

Exercice 2 (Autour de Cesàro – d'après un sujet MP)

À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de Cesàro définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

et la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des écarts définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = u_{n+1} - u_n$$

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell\right)$$

2) Démontrer que le résultat subsiste si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

Ce résultat (questions 1 et 2) sera appelé « théorème de Cesàro ».

Applications

3) **a)** En utilisant le théorème de Cesàro, calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{nk}$.

b) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de (v_n).

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = \alpha$.

a) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e_k$.

b) En utilisant le théorème de Cesàro, donner un équivalent de (u_n).

5) **a)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in]0,+\infty[$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}$.

c) Démontrer que le résultat de la question 5a subsiste si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$.

6) Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles, de limites respectives $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = ab$$

On pourra commencer par étudier le cas $a = b = 0$.

Réciproques partielles

7) Vérifier que la réciproque du théorème de Cesàro n'est pas toujours vraie en exhibant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne converge pas et telle que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

8) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \quad \text{et} \quad (u_n) \text{ monotone} \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \right)$$

9) Théorème de Hardy faible. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{n} k e_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k$$

b) En déduire que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \quad \text{et} \quad e_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \right)$$

Exercice 3

Dans tout le problème, on désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ orthonormé du plan.

A. Étude de la fonction f

1) Étude de f en 0.

a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

b) Peut-on déduire du développement limité du a), que : (justifier avec soin)

- f est continue en 0 ?
- f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$?
- f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$?

c) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 et préciser la position de (C) par rapport à T au voisinage de 0.

2) Variations de f.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

a) Dresser le tableau de variations complet de g et donner le signe de g.

b) Donner les variations de f.

c) Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies de (C) : montrer en particulier que (C) possède deux asymptotes et préciser la position de (C) par rapport à ses asymptotes.

d) Donner l'allure de (C) (faire apparaître les asymptotes et T).

B. Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f.

On considère la suite(u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

2) **a)** Établir : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

b) Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) + \dfrac{1}{2} \geqslant 0.$

c) Montrer : $\forall x \in [0,+\infty[, \quad -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0.$

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|.$

3) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1 - \alpha|.$

4) En déduire que (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.

FIN DE L'ÉPREUVE