Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1 (Dérivées et primitives)

1)

$$\boxed{(g \circ f)' = f' \times g' \circ f}$$

2) Si $\alpha = -1$, une primitive sur $]0, +\infty[$ est

$$\boxed{\ln}$$

Sinon, une primitive sur $]0, +\infty[$ est

$$\boxed{x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$$

Vérifiez vos primitives ! Dérivez...

3) **a)** Pour tout $x \in I$, $\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$

b) La fonction cosinus ne s'annule par sur I, donc $\frac{1}{\cos}$ est bien définie. Ainsi, la fonction tangente est $\mathscr{C}^\infty$ sur I comme produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$. Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\tan' = \frac{1}{\cos^2}}$

c) Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
1 + \tan^2(x) &= 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \\
&= \tan'(x) && \text{d'après la question précédente}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan' = 1 + \tan^2}$$

Cette expression s'obtient aussi directement à partir de la première ligne de calcul de la question précédente :

$$\tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{\cos^2}{\cos^2} + \frac{\sin^2}{\cos^2} = \dots$$

d) *On reconnaît u', avec $u = \tan$. Donc l'expression s'écrit $u'u^n$, et la question est résolue. En maths, il faut réfléchir avec un stylo et une feuille.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{\forall x \in I, \quad F(x) = \frac{1}{n+1} \tan^{n+1}(x)}$$

Pour tout $x \in R$,

$$F'(x) = \frac{1}{n+1} \left((n+1) \tan'(x) \tan^n(x)\right) = f(x)$$

Ainsi, F est une primitive de f sur I.

Exercice 2 (E3A MP 2022)

Pour tout l'exercice : n'hésitez pas à tester pour n petit. Et il faut savoir placer $\omega^k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sur le cercle trigonométrique.

1) *L'expression « si et seulement si » est se formalise en une équivalence : elle se montre par double implication.*
Comme $|z|^2 = z\bar{z}$,

$\boxed{\Longrightarrow}$

$$\begin{aligned} |z| = 1 &\Longrightarrow |z|^2 = z\bar{z} = 1 && \text{Or } z \neq 0 \text{ car sinon } z\bar{z} = 0 \neq 1 \\ &\Longrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} && \textit{Toujours vérifier qu'on ne divise pas par 0 !} \end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

$$\begin{aligned} \bar{z} = \frac{1}{z} &\Longrightarrow z\bar{z} = |z|^2 = 1 \\ &\Longrightarrow |z| = 1 && \text{Tout est positif} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{|z| = 1 \textbf{ si, et seulement si } \bar{z} = \frac{1}{z}}$$

2) Si $k = 0$, $r = 0$ convient.
On constate que $r = n - k$ n'est pas dans le bon intervalle pour $k = 0$, donc qu'il faut traiter ce cas à part lors de la rédaction au propre. Commencez par un brouillon.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. D'après 1, $\overline{\omega^k} = \dfrac{1}{\omega^k} = \omega^{-k}$.
*C'est la question **2** : peut-être que la question 1 peut servir...*
Comme $\omega^n = e^{2i\pi} = 1$, $\omega^{-k} = \omega^{n-k}$. Or

$$\begin{aligned} & 1 \leqslant k \leqslant n-1 \\ \Longrightarrow & -1 \geqslant -k \geqslant -n+1 \\ \Longrightarrow & n-1 \geqslant n-k \geqslant 1 \end{aligned}$$

Donc $r = n - k \in [\![0, n-1]\!]$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Si } k = 0,\ r = 0, \text{ sinon } r = n - k}$$

3) Somme :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1-\omega^n}{1-\omega} && \text{Comme } n \geqslant 2,\ \omega \neq 1 \\ &= 0 && \text{Car } \omega^n = 1 \end{aligned}$$

Produit : $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k}$

Or $A = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$. Si n est impair, $\frac{(n-1)n}{2} = n\frac{n-1}{2}$ est divisible par n, et

$$\omega^A = (\omega^n)^{\frac{n-1}{2}} = 1$$

Si n est pair, $n = 2p$ et $A = \frac{(n-1)2p}{2} = np - p$, donc

$$\omega^A = \omega^{np}\omega^p = \omega^p = e^{\frac{2ip\pi}{2p}} = e^{i\pi} = -1$$

Conclusion :

$$\boxed{S_n = 0 \quad \text{et} \quad P_n = (-1)^{n+1}}$$

On peut aussi raisonner à l'aide des relations coefficients-racines : lorsqu'on développe $(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$, on trouve, par récurrence sur n,

$$(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n) = X^n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$$

Or le polynôme $X^n - 1$ a exactement pour racines, toutes simples, $(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$:

$$(X-1)(X-\omega)\dots(X-\omega^{n-1}) = X^n - S_n X^{n-1} + \dots + (-1)^n P_n = X^n - 1$$

Comme $n \geqslant 2$, $S_n = 0$ et $P_n = (-1)^{n+1}$.

4) **a)** Posons $Q = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$,

$$Q(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

La fonction $x \mapsto Q(x)$ est polynomiale donc dérivable, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$,

$$\begin{aligned} Q'(x) &= \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1} = P(x) \\ &= \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad P(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}}$$

b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. D'après 4a,

$$\begin{aligned} P(\omega^k) &= \frac{n(\omega^{n+1})^k - (n+1)\omega^{nk} + 1}{(\omega^k - 1)^2} \\ &= \frac{n\omega^k - (n+1) + 1}{(\omega^k - 1)^2} && \text{Car } \omega^n = 1 \\ &= \frac{n(\omega^k - 1)}{(\omega^k - 1)^2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad P\left(\omega^k\right) = \frac{n}{\omega^k - 1}}$$

c) Les racines de $X^n - 1$ sont exactement les ω^k avec $k \in [\![0, n-1]\!]$, toutes de multiplicité 1. Donc

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$$

De plus $1 + X + \cdots + X^{n-1} = \dfrac{X^n - 1}{X - 1}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} X^k = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k)$$

En évaluant en $X = 1$, il vient

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \omega^k\right) = n}$$

Exercice 3 (E3A PC 2019)

1) $\boxed{\text{La série de Riemann } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$

2) **a)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} s_{p+1} - s_p &= \sum_{k=0}^{p+1} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n+p+1} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{(s_p) \text{ est croissante}}$$

La série (s_p) est de terme général $u_k = \dfrac{1}{n+k} \sim \dfrac{1}{k}$. Or $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge (1, Riemann $\alpha = 1$: la série harmonique).

Donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{La série } (s_p) \text{ est divergente}}$$

b) Comme (s_p) est croissante et divergente, le théorème de la limite monotone nous donne $\lim\limits_{p \to +\infty} s_p = +\infty$.

Par définition de la limite,

$$\forall A \geqslant 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N} /\ \forall p \geqslant p_0,\ s_p \geqslant A$$

Avec $A = 2$, il vient,

$$\exists p_0 \in \mathbb{N} /\ \forall p \geqslant p_0,\ s_p \geqslant 2 > 1$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Il existe } p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } s_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} > 1}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par construction, $p_n \geqslant 0$, donc $a_n \geqslant n$: par minoration,

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est divergente de limite } +\infty}$$

4) ◦ Soit $n \geqslant 2$.

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{1}{n+k} < \dfrac{1}{n}$. Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1}$$

◦ Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1$$

est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

- $\underline{\mathcal{H}_2}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{4-2} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1.$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n+1+k} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+k} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{2n-2} \frac{1}{n+k}\right) + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} &= \frac{-3+1}{3n} + \frac{3n+1+3n-1}{(3n-1)(3n+1)} \\
&= \frac{-2}{3n} + \frac{6n}{9n^2-1} \\
&= \frac{-2(9n^2-1) + 6n \times 3n}{3n(9n^2-1)} \\
&= \frac{-18n^2 + 2 + 18n^2}{3n(9n^2-1)} \\
&= \frac{2}{3n(9n^2-1)} > 0
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n+1+k} > \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k}$: $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1}$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, p_n est le plus petit entier strictement positif tel que $s_{p_n} = \sum_{k=0}^{p_n} \frac{1}{n+k} > 1$.

D'après 2a, (s_p) est croissante, et d'après 4, $s_{n-1} < 1$. Donc $p_n > n-1$.
D'après 4, $s_{2n-2} > 1$, donc par minimalité de p_n, $p_n \leqslant 2n-2$. Ainsi

$$2n-1 < a_n = n + p_n \leqslant 3n-2$$

Puis $2 - \frac{1}{n} < u_n \leqslant 3 - \frac{2}{n}$. En passant à la limite dans l'encadrement, il vient

$$\boxed{\text{Si la suite } (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell, \text{ alors } \ell \in [2,3]}$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par construction de p_n au 2b, $1 < s_{p_n}$:

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

De plus, p_n est le plus petit p vérifiant cette inégalité, donc $p_n - 1$ ne la vérifie pas : $1 \geqslant s_{p_n-1}$. Comme $s_{p_n} = s_{p_n-1} + \frac{1}{n+p_n} = s_{p_n-1} + \frac{1}{a_n}$, il vient $s_{p_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$$

Conclusion : pour tout entier naturel non nul n :

$$\boxed{1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}}$$

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 6,

$$1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
&\forall k \in [\![0, p_n-1]\!],\ \forall t \in [n+k, n+k+1], && \frac{1}{n+k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n+k} \\
\Longrightarrow &\forall k \in [\![0, p_n-1]\!], && \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{n+k+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{n+k}\,\mathrm{d}t \qquad \left(\text{croissance de } \int\right) \\
\Longrightarrow & && \sum_{k=0}^{p_n-1} \frac{1}{n+k+1} \leqslant \int_n^{n+p_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=0}^{p_n-1} \frac{1}{n+k} \qquad (\text{en sommant les inégalités}) \\
\Longrightarrow & && \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier naturel non nul n :

$$\boxed{1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leqslant 1}$$

8) *L'avantage des intégrales sur les séries, c'est qu'il existe des primitive : une intégrale de fonctions usuelles peut souvent se calculer simplement.*
Comme $0 < n \leqslant a_n$,

$$\begin{aligned}
\int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} &= [\ln t]_n^{a_n} \\
&= \ln(a_n) - \ln(n) \\
&= \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) \\
&= \ln(u_n)
\end{aligned}$$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{n}=1$, donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)$ existe et vaut 1.
Par continuité de l'exponentielle, il vient

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } e}$$

Exercice 4 (E3A MP 2018)

1) Soit $f : x \mapsto x+\ln(1-x)$. La fonction f est définie si $\ln(1-x)$ l'est, donc pour $x \in]-\infty,1[$.
Elle est $\mathscr{C}^\infty$, et

$$\forall x \in]-\infty,1[, \qquad f'(x) = 1-\frac{1}{1-x} = \frac{1-x-1}{1-x} = -\frac{x}{1-x}$$

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	$\Vert$
$f(x)$		$-$	0	$-$	$\Vert$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Le domaine definition de } f \text{ est }]-\infty,1[\text{, et } f \leqslant 0}$$

Comme $\ln(1-x) = -x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$,

$$\boxed{x+\ln(1-x) = -\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

2) Comme $u_n = f(1/n)$, d'après 1,

$$\boxed{u_1 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n>1,\ u_n<0}$$

3) D'après le développement limité obtenu à la question 1,

$$|u_n| \sim \frac{1}{2n^2}$$

Or, d'après Riemann, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente ($\alpha = 2 > 1$), d'où, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge absolument. Ainsi,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ est convergente}}$$

4) La fonction est $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\forall x \in [0,1], \qquad f'(x) = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

Ce qui nous donne le tableau de variations suivant :

x	0		1
$f'(x)$	0	$+$	$\|\|$
f	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$

5) De même qu'en 3, on effectue un développement limité :

$$v_n = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann), par théorème de comparaison $\sum v_n$ est absolument convergente, donc

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ est convergente}}$$

6) Pour $n \geqslant 2$, $v_n - u_n = -\ln(\frac{n+1}{n}) - \ln(\frac{n-1}{n}) = 2\ln(n) - \ln(n+1) - \ln(n-1)$. Ainsi, pour $N \geqslant 3$, comme $v_1 = 1 - \ln 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}(v_n - u_n) &= v_1 - u_1 + \sum_{n=2}^{N} 2\ln(n) - \ln(n+1) - \ln(n-1)\\
&= -\ln 2 + 2\sum_{n=2}^{N}\ln(n) - \sum_{n=2}^{N}\ln(n+1) - \sum_{n=2}^{N}\ln(n-1)\\
&= -\ln 2 + 2\sum_{n=2}^{N}\ln(n) - \sum_{n=3}^{N+1}\ln(n) - \sum_{n=1}^{N-1}\ln(n)\\
&= -\ln 2 + 2(\ln(2) + \ln N) - \ln(N) - \ln(N+1) - \ln(2)\\
&= \boxed{-\ln(1+\frac{1}{N})}
\end{aligned}$$

7) Les suites $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont adjacentes :

- D'après la question 6, leur différence tend vers 0 ;
- D'après la question 2, $u_n < 0$ pour $n \geqslant 2$, donc $(\sum_{n=1}^{N} u_n)$ est décroissante.
- Pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = f(n) \geqslant 0$ d'après la question 4, donc $(\sum_{n=1}^{N} v_n)$ est croissante.

Ainsi, d'après le théorème des suites adjacentes,

$$\boxed{\text{Les suites } (\sum_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (\sum_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ sont convergentes vers une même limite.}}$$

8) Comme $u_2 < 0$, $u_1 = 1$ et $(\sum_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$ décroissante, il vient $\gamma < 1$.

De même, $(\sum_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$ croissante et $v_1 = 1 - \ln 2 > 0$.

Ainsi,

$$\boxed{\gamma \in]0, 1[}$$

9) **a)** Soit $k \in [\![2, n]\!]$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant décroissante sur $[k, k+1]$ et $[k-1, k]$ (intervalles de $\mathbb{R}_+^*$),

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad \forall t \in [k-1, k], \quad \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{t}$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}}$$

b) L'inégalité de gauche de la question précédente est encore valable pour $k = 1$: $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{1}$. En sommant les inégalités de gauche entre $k = 1$ et $k = n$, il vient

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = h_n$$

En sommant les inégalités de droite entre $k = 2$ et $k = n$, il vient

$$h_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Comme, pour $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln t]_1^x = \ln x$,

$$\boxed{\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)}$$

10) ERRATUM. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f_{n+1} - f_n &= h_{n+1} - \ln(n+1) - h_n + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\Big(\frac{n}{n+1}\Big) && \text{Or } \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= u_{n+1} < 0 && \text{D'après la question 2, pour } n \geqslant 2 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$$

11) *Variations puis convergence : essayer d'appliquer le TLM doit être un réflexe.*
D'après la question 9,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_n = h_n - \ln(n) \geqslant \ln(n+1) - \ln(n) > 0$$

Donc (f_n) est décroissante (question 10) majorée par 0 : d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.
De plus, d'après 10, $f_{n+1} - f_n = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, en sommant,

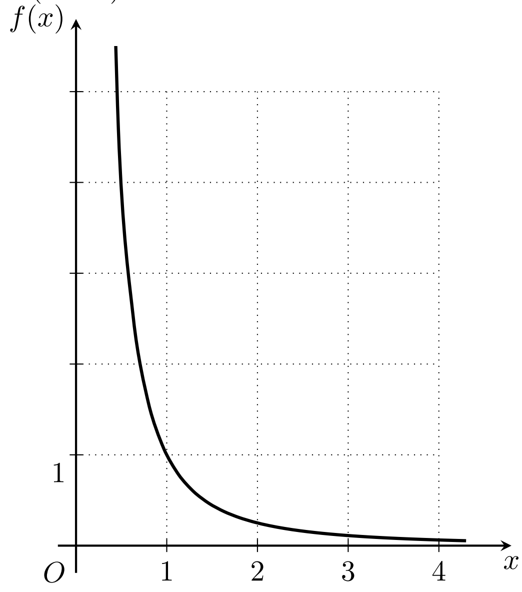
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} u_k &= u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1} - f_k \\ &= 1 + f_n - f_1 && \text{somme télescopique} \\ &= f_n \end{aligned}$$

Finalement, d'après la question 8,

$$\boxed{\text{La suite } (f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente et de limite } \gamma}$$

12) Soit r un entier naturel > 1.

a) La fonction est décroissante ($r > 0$) de limites $+\infty$ en 0 et 0 en $+\infty$.



b) Soit a un nombre réel > 0.

i) Soit $X > a$. Comme $r \neq 1$,

$$\int_a^X t^{-r}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-r+1}}{-r+1}\right]_a^X = \frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{X^{r-1}} - \frac{1}{a^{r-1}}\right)$$

ii) Comme $r > 1$, $r-1 > 0$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X^{r-1}} = 0$. Ainsi,

$$\boxed{I(a) \text{ existe et vaut } \frac{1}{(r-1)a^{r-1}}}$$

c) **i)** Soit $\varepsilon = \inf\{\ell - a, b - \ell\}$. Ainsi $\varepsilon > 0$ et

$$0 < a \leqslant \ell - \varepsilon < \ell < \ell + \varepsilon \leqslant b$$

Par définition de la limite,

$$\exists N \in \mathbb{N} /\ \forall n \geqslant N, \quad |n^r(w_{n+1} - w_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Conclusion :

$$\boxed{\exists N \geqslant 2 /\ \forall n \geqslant N, \quad a \leqslant n^r(w_{n+1} - w_n) \leqslant b}$$

ii) Soit $n \geqslant N$. Pour tout $k \geqslant N$, d'après i,

$$\frac{a}{k^r} \leqslant w_{k+1} - w_k \leqslant \frac{b}{k^r}$$

Comme $N \geqslant 2$, $[N-1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. Par décroissance de $t \mapsto t^{-r}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall k \geqslant N-1,\ \forall t \in [k, k+1], \qquad \frac{1}{(k+1)^r} \leqslant \frac{1}{t^r} \leqslant \frac{1}{k^r}$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\forall k \geqslant N-1, \qquad \frac{1}{(k+1)^r} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^r}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^r}$$

Or $\forall k \geqslant N-1, \quad \dfrac{1}{(k+1)^r} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^r}\,\mathrm{d}t$ peut s'écrire, en décalant les indices,

$$\forall k \geqslant N, \quad \frac{1}{k^r} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^r}\,\mathrm{d}t$$

D'où l'encadrement,

$$\forall k \geqslant N, \qquad \int_k^{k+1} \frac{1}{t^r}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^r} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^r}\,\mathrm{d}t$$

Comme $a>0$ et $b>0$, il vient donc

$$a\int_k^{k+1} \frac{1}{t^r}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{k^r} \leqslant w_{k+1}-w_k \leqslant \frac{b}{k^r} \leqslant b\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^r}\,\mathrm{d}t$$

En sommant de $k=N$ à $k=n$, les termes centraux se télescopent et il vient

$$\boxed{a\int_N^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \leqslant w_{n+1}-w_N \leqslant b\int_{N-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}}$$

iii) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, et que $I(N-1)$ et $I(N)$ existent, passons à la limite lorsque $n \to +\infty$:

$$aI(N) \leqslant -w_N \leqslant bI(N-1)$$

Puis

$$\boxed{-bI(N-1) \leqslant w_N \leqslant -aI(N)}$$

iv) D'après 12b, $I(N) = \dfrac{1}{(r-1)N^{r-1}}$, et $I(N-1) = \dfrac{1}{(r-1)(N-1)^{r-1}}$.

Par conséquent l'encadrement de la question iii nous donne $-b\dfrac{1}{(r-1)(N-1)^{r-1}} \leqslant w_N \leqslant -a\dfrac{1}{(r-1)N^{r-1}}$ d'où

$-b\dfrac{N^{r-1}}{(r-1)(N-1)^{r-1}} \leqslant N^{r-1}w_N \leqslant -a\dfrac{1}{(r-1)}$ ou encore

$a \leqslant -(r-1)N^{r-1}w_N \leqslant b\dfrac{N^{r-1}}{(N-1)^{r-1}}$.

Soit $\varepsilon>0$, en prenant $a = \ell - \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $b = \ell + \dfrac{\varepsilon}{2}$ et en remarquant que les résultats du ii. et iii. sont encore valables pour tout $n \geqslant N$ (et pas seulement pour N).

On a donc $\forall n \geqslant N$: $\ell - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant -(r-1)n^{r-1}w_n \leqslant (\ell + \dfrac{\varepsilon}{2})\dfrac{n^{r-1}}{(n-1)^{r-1}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ell + \dfrac{\varepsilon}{2})\dfrac{n^{r-1}}{(n-1)^{r-1}} = \ell + \dfrac{\varepsilon}{2}$, il existe $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N'$:

$(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2})\dfrac{n^{r-1}}{(n-1)^{r-1}} \leqslant \ell + \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \ell + \varepsilon$ et donc

$\forall n \geqslant \max(N,N')$: $\ell - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant -(r-1)n^{r-1}w_n \leqslant (\ell + \dfrac{\varepsilon}{2})\dfrac{n^{r-1}}{(n-1)^{r-1}} \leqslant \ell + \varepsilon$.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r-1}w_n = \dfrac{-\ell}{r-1}}$

v) Oui avec , par exemple, les sommations de relations de comparaisons : Si $(n^r(w_{n+1}-w_n))$ tend vers 0 alors lorsque n tend vers l'infini : $w_{n+1}-w_n = o(\dfrac{1}{n^r})$ et comme $\dfrac{1}{n^r} > 0$, on peut appliquer les S.R.C. dans le cas convergeant : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k) = o\Big(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^r}\Big)$ d'où $0 - w_n = o\Big(\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^r}\Big)$ et par comparaison série-intégrale classique (à refaire) : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{n^r} \underset{n\to+\infty}{\sim} I(n)$.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{Le résultat est encore vrai si } \ell = 0}$

13) Analyse :

On veut $f_n - \gamma \sim \frac{\alpha}{n}$ soit $n^1(f_n - \gamma) \to \alpha$. Il suffirait que $n^2(w_{n+1} - w_n)$ converge avec $w_n = \gamma - f_n$ (et non $w_n = f_n - \gamma$ car on a vu au (c) que $w_n < 0$).

Synthèse :

Posons $w_n = \gamma - f_n$, on a :

$n^2(w_{n+1} - w_n) = n^2(\gamma - f_{n+1} - \gamma + f_n) = n^2(-\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n))$

$= n^2(-\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(n))$

$\underset{n\to+\infty}{=} n^2\Big[-\frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\Big] \underset{n\to+\infty}{=} n^2(\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} > 0.$

On applique le 12. avec $r = 2$ et $\ell = \frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n = \frac{-\frac{1}{2}}{2-1} = -\frac{1}{2}$.

On en déduit que $n(\gamma - f_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2} + o(1)$, donc $\gamma - f_n = \gamma - h_n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$, on peut conclure.

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}$

FIN DE L'ÉPREUVE