Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 12 septembre 2022

# Épreuve de Mathématiques 1

---

Durée 4 h

---

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'utilisation d'effaceurs chimiques ou de « vernis » de masquage est interdite. Tous les textes sont obligatoirement écrits à l'encre bleue foncée ou noire. L'usage du crayon à papier est interdit. D'autres couleurs peuvent être utilisées pour améliorer la présentation. Il est interdit de coller, couper les copies et adjoindre des brouillons.

---

**Les calculatrices sont interdites**

## Exercice 1 (Dérivées et primitives)

**1)** Soit $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Expression (sans preuve) de
$$(g \circ f)'$$

**2)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$.
Donner (sans preuve) une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ selon les valeurs de $\alpha$.

**3)** Soit $I = [0, \pi/2[$. Dans tout l'exercice, on se place sur $I$.

**a)** Donner une expression de tan à l'aide de sin et cos.

**b)** Calculer, à l'aide de l'expression rappelée ci-dessus, la dérivée de tan.

**c)** En déduire que $\tan' = 1 + \tan^2$.

**d)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = (1 + \tan^2(x))(\tan x)^n$$

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note : $\omega = \exp\left(\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)$ où i est un nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

**1)** Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ **si, et seulement si** $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

**2)** Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Déterminer $r \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^r$.

**3)** Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$.

**4)** On considère le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$.

**a)** Montrer que pour tout réel $x$ différent de 1 : $P(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

**b)** Montrer que : $\forall k \in [\![1, n-1]\!], P\left(\omega^k\right) = \dfrac{n}{\omega^k - 1}$.

**c)** En factorisant $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \omega^k\right) = n$.

# Exercice 3

**1)** <u>Question de cours</u> : Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel $\alpha$ la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

**2)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**a)** On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $s_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$
Vérifier que la suite $(s_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.

**b)** Montrer qu'il existe au moins un entier naturel $p$ tel que l'on ait :

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 1$$

On note alors $a_n = n + p_n$ où $p_n$ est le plus petit entier $p$ vérifiant cette propriété et on pose : $u_n = \dfrac{a_n}{n}$.
On a donc : $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} > 1$.

**3)** La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

**4)** Prouver pour $n \geqslant 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1$$

**5)** Montrer que si la suite $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$, alors $\ell \in [2, 3]$.

**6)** Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul $n$ : $1 < \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{a_n}$

**7)** Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul $n$ :

$$1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leqslant 1$$

**8)** En déduire que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

# Exercice 4

Pour tout entier naturel $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \; f_n = h_n - \ln(n)$$

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_1 = 1 \;\text{ et pour }\; n \geqslant 2, \; u_n = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) \; ; \; v_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$$

**1)** Rappeler le domaine de définition de la fonction $(x \mapsto x + \ln(1-x))$. Déterminer son signe. Préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.

**2)** Soit $n$ un entier naturel non nul. Quel est le signe de $u_n$ ?

**3)** Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente.

**4)** Etudier la fonction $(f \;:\; x \mapsto x - \ln(1+x))$ sur $[0, 1]$.

**5)** Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente.

**6)** Soit $n$ un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de $n$, $v_n - u_n$.

En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{N}(v_n - u_n)$ en fonction de $N$ pour tout entier naturel $N$ supérieur ou égal à 3.

**7)** Que peut-on dire des suites $(\sum_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sum_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$ ? Justifier que $\sum_{n\geqslant 1} v_n = \sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Dans la suite de l'exercice, on note $\gamma$ la somme des séries $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

**8)** Démontrer que $\gamma$ est dans l'intervalle $]0,1[$.

**9)** Soit $n$ un entier naturel non nul.

**a)** Montrer que, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

**b)** Justifier que :

$$\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

**10)** Justifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

**11)** Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite $\gamma$.

*Indication* : exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1}^{N} u_n$ en fonction des termes de la suite $(f_n)$.

**12)** Soit $r$ un entier naturel $> 1$.

**a)** Dessiner le graphe de la fonction $(x \mapsto 1/x^r)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

**b)** Soit $a$ un nombre réel $> 0$.

**i)** Soit $X > a$. Calculer $\int_a^X \frac{\mathrm{d}t}{t^r}$.

**ii)** En déduire l'existence et la valeur, en fonction de $a$ et $r$, de

$$I(a) = \lim_{X\to+\infty} \int_a^X \frac{\mathrm{d}t}{t^r}$$

**c)** Soit $(w_n)$ une suite de nombres réels qui converge vers 0.
On suppose que la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite $\ell$ telle que $\ell > 0$.

**i)** Soient $a, b$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $0 < a < \ell < b$. Justifier l'existence d'un entier naturel $N$ supérieur ou égal à 2 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on ait les inégalités :

$$a \leqslant n^r(w_{n+1} - w_n) \leqslant b$$

**ii)** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à $N$ :

$$a\int_N^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \leqslant w_{n+1} - w_N \leqslant b\int_{N-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}$$

**iii)** En déduire l'encadrement :

$$-bI(N-1) \leqslant w_N \leqslant -aI(N)$$

où $I$ a été défini dans la question 12(b).

**iv)** Démontrer que la suite $(n^{r-1}w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et expliciter en fonction de $\ell$ et $r$ sa limite.

**v)** Ce résultat reste-t-il vrai si la limite $\ell$ de la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $0$ ?

**13)** Démontrer qu'il existe un nombre réel $\alpha$ que l'on explicitera tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$$

*Indication* : on appliquera les résultats de la question 12 à une suite bien choisie.

**FIN DE L'ÉPREUVE**