Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1

1) *Il faut toujours vérifier que a et b commutent : ici ce sont des complexes, donc c'est le cas.*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Ayez des moyens de vérification :

- Testez pour n petit : pour $n = 1$, est-ce que votre formule donne bien

$$(a + b)^1 = a + b$$

Pour $n = 2$, est-ce que vous retrouvez l'identité remarquable :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- D'ailleurs, à partir du moment où vous connaissez cette identité ($n = 2$), vous connaissez la formule du binôme :
 - Pour $n = 2$, il y a 3 termes dans la somme.
Dans le cas général, il y a $n + 1$ termes, i.e. votre somme commence à $k = 0$.
 - Pour $n = 2$, la somme des degrés en a et b est toujours 2 ($2 + 0 = 1 + 1 = 0 + 2 = 2$).
Dans le cas général, la somme des degrés doit faire n : $k + n - k = n$.
 - On commence à $a^2 b^0$ et on finit à $a^0 b^2$, dans le cas général la somme commence à $a^n b^0$ et finit à $a^0 b^n$.
 - Il y a un coefficient binomial (le « 2 ») ... comme le nom de la formule l'indique.

2) a) Le calcul nous donne $B = A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$.

b) Pour tout entier $k \geq 3$, $B^k = B^3 B^{k-3} = 0 \cdot B^{k-3} = 0$.

3) $A = 3I_3 + B$. Or I_3 et B **commutent**, donc on peut écrire la formule du binôme de Newton : pour tout entier $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= (3I_3 + B)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} I_3^{n-k} B^k \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k && (B^k = 0 \text{ si } k \geq 3) \\ &= 3^n I_3 + n 3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2 \\ A^n &= 3^n \left(I_3 + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right) \end{aligned}$$

Si $n = 0$, $A^0 = I_3$, la formule est vraie; et si $n = 1$, on retrouve aussi la bonne formule, puisque le terme en $n(n-1)$ s'annule.

4) a) Comme

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n + 2v_n + 2w_n \\ u_n + 3v_n \\ -u_n + 3w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

la relation de récurrence est la suivante : $X_{n+1} = AX_n$.

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : X_n = A^n X_0$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- $\mathcal{H}_0$: est vraie par hypothèse : $A^0 = I_3$.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n && \text{(relation ci-dessus)} \\ &= A(A^n X_0) && (\mathcal{H}_n) \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion** : $\forall n \geq 0, X_n = A^n X_0$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 = 3^n \left(I_3 + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right) X_0 \\ \text{Donc } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= 3^n \left(X_0 + \frac{n}{3} B X_0 + \frac{n(n-1)}{18} B^2 X_0 \right) = 3^n \begin{pmatrix} 2 + 2n/3 \\ 1 + 2n/3 + n(n-1)/9 \\ -2n/3 - n(n-1)/9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

- $u_n = 3^n(2 + 2n/3)$ et a pour limite $+\infty$;
- $v_n = 3^n(1 + 2n/3 + n(n-1)/9)$ et a pour limite $+\infty$;
- $w_n = 3^n(-2n/3 - n(n-1)/9)$ et a pour limite $-\infty$.

Exercice 2 (Sommes géométriques)

1) Il faut distinguer le cas $x \neq 1$ et $x = 1$. *Vérification : on ne divise pas par 0.*

$$\forall x \neq 1, \quad \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Si $x = 1$, $\sum_{k=0}^n x^k = n + 1$.

2) La série converge si et seulement si $|x| < 1$, i.e. $x \in]-1, 1[$.

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $e^{inx} e^{nx} = e^{(1+i)nx}$. Posons

$$q = e^{(1+i)x}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^n = e^{(1+i)nx} = e^{inx} e^{nx}$ donc

$$\Re(q^n) = \cos(nx) e^{nx} = u_n$$

b) Si $x = 0$, $u_n = 1$ pour tout n , donc $\sum_{k=0}^n u_k = n + 1$.

Désormais $x \neq 0$, donc $|q| \neq 1$, et par conséquent $q \neq 1$.

Commençons par trouver une expression sans sommation de $\sum_{k=0}^n q^k$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n q^k &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - e^{(1+i)(n+1)x}}{1 - e^{ix}e^x} && \text{Ici, l'angle moitié ne donne rien} \\ &= \frac{(1 - e^{-ix}e^x)(1 - e^{(1+i)(n+1)x})}{(1 - e^{-ix}e^x)(1 - e^{ix}e^x)} && \text{donc, quantité conjugué} \\ &= \frac{1 - e^{(1+i)(n+1)x} - e^{-ix}e^x - e^{-inx}e^{(n+2)x}}{1 - 2\cos(x)e^x + e^{2x}} \end{aligned}$$

Puis, en passant à la partie réelle :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1 - \cos((n+1)x)e^{(n+1)x} - \cos(x)e^x - \cos(nx)e^{(n+2)x}}{1 - 2\cos(x)e^x + e^{2x}}$$

Exercice 3 (Dérivées et primitives)

1)

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

2) Si $\alpha = -1$, une primitive sur $]0, +\infty[$ est

$$\ln$$

Sinon, une primitive sur $]0, +\infty[$ est

$$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Vérifiez vos primitives ! Dérivez...

3) a) Pour tout $x \in I$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

b) La fonction cosinus ne s'annule pas sur I , donc $\frac{1}{\cos}$ est bien définie. Ainsi, la fonction tangente est $\mathcal{C}^\infty$ sur I comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$

c) Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2(x) &= 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ &= \tan'(x) \end{aligned}$$

d'après la question précédente

Conclusion,

$$\boxed{\tan' = 1 + \tan^2}$$

Cette expression s'obtient aussi directement à partir de la première ligne de calcul de la question précédente :

$$\tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{\cos^2}{\cos^2} + \frac{\sin^2}{\cos^2} = \dots$$

- d) On reconnaît u' , si on note $u = \tan$. Donc l'expression s'écrit $u'u^n$. Donc on sait faire : en maths, il faut réfléchir avec un stylo et une feuille.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{\forall x \in I, \quad F(x) = \frac{1}{n+1} \tan^{n+1}(x)}$$

Pour tout $x \in R$,

$$F'(x) = \frac{1}{n+1} ((n+1) \tan'(x) \tan^n(x)) = f(x)$$

Ainsi, F est une primitive de f sur I .

Exercice 4 (ATS 2019)

- 1) a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(-t) &= \frac{e^{-t} + e^{-(-t)}}{2} & \operatorname{sh}(-t) &= \frac{e^{-t} - e^t}{2} \\ &= \operatorname{ch}(t) & &= -\operatorname{sh}(t) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{ch} \text{ est paire et } \operatorname{sh} \text{ est impaire}}$$

- b) La fonction exponentielle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc, comme combinaison linéaire d'exponentielles,

$$\boxed{\text{Les fonctions } \operatorname{ch} \text{ et } \operatorname{sh} \text{ sont dérivables sur } \mathbb{R}}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}'(t) &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} & \operatorname{sh}'(t) &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ &= \operatorname{sh}(t) & &= \operatorname{ch}(t) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}}$$

- c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2 \operatorname{sh}(t) \operatorname{ch}(t) - 2 \operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}(t) = 0$$

Donc f est une fonction constante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = f(0) = 1$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\operatorname{ch} t)^2 - (\operatorname{sh} t)^2 = 1}$$

Cette formule peut aussi se retrouver en écrivant ch et sh à l'aide d'exponentielles et en développant l'expression.

2) Tableaux de variations des fonctions ch et sh :

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\text{sh}'(t) = \text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0$.

- $\text{sh}(0) = 0$
- $\text{sh}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^t}{2} \rightarrow +\infty$
- $\text{sh}(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} -\frac{e^{-t}}{2} \rightarrow -\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}'(x)$	+	+	
sh	$-\infty$	0	$+\infty$

Désormais nous connaissons le signe de $\text{ch}' = \text{sh}$ sur $\mathbb{R}$:

- $\text{ch}(0) = 1$
- $\text{ch}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^t}{2} \rightarrow +\infty$
- $\text{ch}(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{2} \rightarrow +\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}'(x)$	-	0	+
ch	$+\infty$	1	$+\infty$

3) a) La fonction sh est *continue* sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et *strictement croissante*. De plus 1 appartient à l'intervalle image : $1 \in]-\infty, +\infty[$.

Donc, d'après le théorème de la *bijection*,

L'équation $\text{sh } t = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle

b) Par définition, $\text{sh}(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = 1$. En multipliant par $2e^\alpha$, il vient

$$e^{2\alpha} - 1 = 2e^\alpha$$

D'où

$$z^2 - 2z - 1 = 0$$

c) Résolvons : $\Delta = 4 + 4 = 8$, donc les solutions de $x^2 - 2x - 1 = 0$ sont

$$\frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad 1 - \sqrt{2} < 0$$

Or $z = e^\alpha > 0$, donc $z = 1 + \sqrt{2}$ (qui est bien positif), et

$$\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$$

d) Comme $\sqrt{2} < 1,5 < e - 1$, $1 < 1 + \sqrt{2} < e$, puis par croissance du ln,

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

4) Comme $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$, il vient

$$\text{ch}^2 \alpha = 1 + \text{sh}^2 \alpha = 2$$

Or $\text{ch} > 0$, donc

$$\text{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$$