Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 7 septembre 2020

Épreuve de Mathématiques 1

Durée 2 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

1) Énoncer la formule du binôme (sans preuve) : pour a et $b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, développer

$$(a+b)^n$$

On considère les matrices carrées A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = A - 3I_3$$

2) **a)** Calculer B, B^2 et B^3.

b) En déduire B^k pour tout entier $k \geqslant 3$.

3) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en justifiant son utilisation, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,
$A^n = 3^n \left(I_3 + \dfrac{n}{3}B + \dfrac{n(n-1)}{18}B^2 \right).$

4) Est-ce encore vrai pour $n \in \{0, 1\}$?

5) On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2w_n, \qquad v_{n+1} = u_n + 3v_n, \qquad w_{n+1} = -u_n + 3w_n$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

b) Déduire des questions précédentes l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n, v_n et w_n en fonctions de n, puis les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 (Sommes géométriques) **1)** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner (sans preuve), selon la valeur de x, une expression sans symbole de sommation de

$$\sum_{k=0}^{n} x^k$$

2) Donner (sans preuve) une condition nécessaire et suffisante sur x pour que cette série converge, puis sa limite.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \cos(nx)e^{nx}$$

a) Trouver $q \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \Re(q^n)$.

b) Déterminer une expression sans sommation de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 3 (Dérivées et primitives)

1) Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Expression (sans preuve) de

$$(g \circ f)'$$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$.
Donner (sans preuve) une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ selon les valeurs de α.

3) Soit $I = [0, \pi/2[$. Dans tout l'exercice, on se place sur I.

a) Donner une expression de tan à l'aide de sin et cos.

b) Calculer, à l'aide de l'expression rappelée ci-dessus, la dérivée de tan.

c) En déduire que $\tan' = 1 + \tan^2$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (1 + \tan^2(x))(\tan x)^n$$

Exercice 4

On rappelle que les fonctions trigonométriques hyperboliques ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

1) **a)** Étudier la parité des fonctions ch et sh.

b) Montrer que les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t$ et $\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t$.

c) Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\operatorname{ch} t)^2 - (\operatorname{sh} t)^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\operatorname{ch} t)^2$ et $(\operatorname{sh} t)^2$.

2) Tracer les tableaux de variations des fonctions ch et sh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de ch et sh en 0.

3) **a)** En se basant sur les variations de sh, montrer que l'équation $\operatorname{sh} t = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α.

b) On pose $z = e^\alpha$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.

c) En déduire la valeur exacte de α.

d) Montrer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

4) Montrer, sans utiliser le résultat de la question 3c, que $\operatorname{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$.

FIN DE L'ÉPREUVE