# Mathématiques 1

**PC**



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

L'objectif de ce sujet est d'établir le théorème de Perron-Frobenius pour une certaine classe de matrices symétriques. Ce théorème étudie les espaces propres d'une matrice associés aux valeurs propres de module maximal. Une application, en conclusion, montre une ouverture à l'analyse spectrale des matrices à coefficients positifs.

— La partie I permet d'obtenir des résultats préliminaires, utiles pour les parties suivantes.

— La partie II examine, à titre d'exemple, le cas des matrices à coefficients strictement positifs de taille deux.

— La partie III s'intéresse au lien entre le rayon spectral d'une matrice et le comportement asymptotique de la suite de ses puissances successives ; elle est indépendante de la partie II.

— La partie IV donne une démonstration du théorème pour une classe de matrices symétriques à coefficients positifs ; elle est indépendante des parties II et III.

## Notations et définitions

$\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes.

Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls.

— On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

— Si $A = (A_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $|A|$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont $|A_{ij}|$ ($1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$).

— Une matrice $A$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (respectivement strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls (respectivement strictement positifs). La notation $A \geqslant 0$ (respectivement $A > 0$) signifie que la matrice $A$ est positive (respectivement strictement positive).

— Si $A$ et $B$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la notation $A \geqslant B$ (respectivement $A > B$) signifie que la matrice $A - B$ est positive (respectivement strictement positive). De même, la notation $A \leqslant B$ (respectivement $A < B$) signifie que la matrice $B - A$ est positive (respectivement strictement positive).

— Les propriétés suivantes pourront être librement utilisées (sous réserve que les opérations correspondantes puissent être envisagées) :
- $|A + B| \leqslant |A| + |B|$ ;
- $|A^\top| = |A|^\top$ ;
- si $\gamma \in \mathbb{K}$, alors $|\gamma A| = |\gamma||A|$ ;
- si $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$, alors $AB \geqslant 0$.

— On rappelle que le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini, pour tous vecteurs $X$ et $Y$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par

$$(X \mid Y) = X^\top Y = \sum_{k=1}^{n} X_k Y_k, \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

La norme euclidienne (associée à ce produit scalaire) du vecteur $X$ est alors donnée par

$$\|X\| = \sqrt{X^\top X} = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{1/2}.$$

— Le spectre d'une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{sp}(A)$.

— Le rayon spectral d'une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de spectre non vide, est le réel positif ou nul, noté $\rho(A)$, défini par

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}.$$

— On dit qu'une norme $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ est sous-multiplicative si, pour toutes matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

# I Résultats préliminaires

**Q 1.** Soit $n$ un entier naturel, $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X$ un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\text{si } A > 0, X \geqslant 0 \text{ et } X \neq 0, \text{ alors } AX > 0,$$

et que

$$|AB| \leqslant |A||B|.$$

**Q 2.** Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
En déduire que si $n$ est un entier naturel et $z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n$ sont des nombres complexes, alors

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k||w_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right)^{1/2}.$$

**Q 3.** Soit $z$ un nombre complexe tel que $|1+z| = 1+|z|$. Montrer que $z \in \mathbb{R}_+$. En déduire que, si $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes vérifiant $|z+z'| = |z|+|z'|$ et $z \neq 0$, alors

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid z' = \alpha z.$$

**Q 4.** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $z_1, ..., z_n$ des nombres complexes non tous nuls tels que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Montrer que

$$\exists\, \theta \in \mathbb{R} \mid \forall k \in [\![1, n]\!], z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} |z_k|.$$

Dans le cas où $z_1 \neq 0$, on pourra appliquer le résultat de la question précédente aux couples $(z_1, z_k)$ pour $k \in [\![2, n]\!]$.

# II Matrices strictement positives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $a$, $b$, $c$ et $d$ des nombres réels strictement positifs et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

**Q 5.** Exprimer le discriminant $\Delta$ du polynôme caractéristique de $A$ en fonction de $a$, $b$, $c$ et $d$.

**Q 6.** Montrer que $\Delta > 0$. En déduire qu'il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$, vérifiant $\lambda < \mu$, tels que $A$ soit semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

**Q 7.** Montrer que $|\lambda| < \mu$.

**Q 8.** Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice $L$ non nulle si et seulement si $\mu = 1$. En cas de convergence, préciser le rang de $L$ puis montrer que $L$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

**Q 9.** Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels de $]0, 1[$ et $B$ la matrice $\begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$. Montrer que $B$ est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}$ et donner une matrice $S$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible, telle que $B = SDS^{-1}$.

**Q 10.** En déduire que la suite $(B^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice $\Lambda$ que l'on explicitera.

# III Normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ; rayon spectral

### *III.A – Exemples de normes sous-multiplicatives sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Pour toute matrice $A = (A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|\right) \qquad \text{et} \qquad \|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

**Q 11.** Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Q 12.** On admet que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ; montrer que cette norme est sous-multiplicative.

**Q 13.** Soit $N$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $S$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'on définit une norme sous-multiplicative $\nu$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $\nu(A) = N(S^{-1}AS)$ pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

### *III.B – Rayon spectral*

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**III.B.1)**

**Q 14.** Soit $S$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\rho(A)$ et $\rho(S^{-1}AS)$.

**Q 15.** Justifier que $A$ est trigonalisable. Comparer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A^k)$ et $\rho(A)^k$ et, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho(\alpha A)$ et $\rho(A)$.

**Q 16.** Montrer que, pour toute norme $N$ sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) \leqslant N(A)$.

On pourra fixer une valeur propre $\lambda$ de $A$ et mettre en évidence une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AH = \lambda H$.

**III.B.2)**

Le but de cette section est de montrer que, pour tout réel strictement positif $\varepsilon > 0$, il existe une norme $N$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sous-multiplicative (dépendant de $A$ et de $\varepsilon$), telle que

$$N(A) \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

À cette fin, on introduit, pour tout réel strictement positif $\tau$, la matrice diagonale

$$D_\tau = \operatorname{diag}(1, \tau, ..., \tau^{n-1})$$

et on considère une matrice $T$ triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Q 17.** Calculer le produit $D_\tau^{-1} T D_\tau$ en précisant, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, l'expression du coefficient en position $(i,j)$ de la matrice $D_\tau^{-1} T D_\tau$ en fonction de $\tau$ et des coefficients de la matrice $T$.

**Q 18.** Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\tau| \leqslant \delta$, on a $\|D_\tau^{-1} T D_\tau\|_\infty \leqslant \rho(T) + \varepsilon$.

**Q 19.** Conclure.

**III.B.3)**

**Q 20.** Utiliser ce qui précède pour montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(A) < 1$.

## IV Théorème de Perron-Frobenius pour une classe de matrices symétriques positives

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $A$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et positive (c'est-à-dire à coefficients positifs ou nuls). On pose $r = \rho(A)$.

### *IV.A –*

**Q 21.** Justifier que $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire des sous-espaces propres de $A$ ?

**Q 22.** Montrer que $r > 0$.

On note $\mu$ la plus grande valeur propre de $A$.

**Q 23.** Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, unitaire pour la norme euclidienne canonique,

$$X^\top AX \leqslant \mu.$$

On pourra faire le calcul dans une base orthonormée convenablement choisie.

**Q 24.** Montrer que cette inégalité est une égalité si, et seulement si, $X$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\mu$.

**Q 25.** Montrer que, pour tout vecteur unitaire $X$,

$$|X^\top AX| \leqslant |X|^\top A|X| \leqslant \mu.$$

**Q 26.** En déduire que, pour toute valeur propre $\lambda$ de $A$, on a $|\lambda| \leqslant \mu$, et que $\mu = r$.

### *IV.B –*

Dans cette sous-partie uniquement, on suppose en outre que $A$ est strictement positive.

**Q 27.** Montrer que, si $X$ est un vecteur propre de $A$, unitaire, associé à la valeur propre $r$, alors $|X|$ est un vecteur propre de $A$, unitaire, associé à la valeur propre $r$, et que $|X| > 0$.

**Q 28.** Montrer que $X = |X|$ ou $X = -|X|$.

**Q 29.** Montrer que le sous-espace propre $\ker(A - rI_n)$ est de dimension 1.

On pourra raisonner par l'absurde en considérant deux vecteurs propres de $A$ orthogonaux associés à $r$.

**Q 30.** Montrer que la multiplicité de $r$, en tant que valeur propre, vaut 1 et en déduire que $-r$ n'est pas valeur propre de $A$.

Ainsi, $r$ est l'unique valeur propre de $A$ de module égal à $r$.

**Q 31.** Montrer que cette propriété n'est pas forcément vérifiée si $A$ est seulement supposée positive.

On pourra chercher des exemples dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

### *IV.C –*

On suppose dans cette sous-partie qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que $A^p$ est strictement positive.

D'après la question 26, $r$ est une valeur propre de $A$.

**Q 32.** Montrer que l'espace propre $\ker(A - rI_n)$ est de dimension 1, engendré par un vecteur strictement positif.

**Q 33.** Montrer que $r$ est l'unique valeur propre de $A$ de module égal à $r$.

On pourra distinguer deux cas suivant la parité de $p$.

### *IV.D – Une application : un théorème de Ky Fan*

On admet que les résultats obtenus pour les matrices symétriques strictement positives, ou positives admettant une puissance strictement positive, restent vrais pour une matrice strictement positive. Ainsi, si $B$ est une matrice strictement positive, alors $\rho(B)$ est l'unique valeur propre de $B$ de module maximal, elle est de multiplicité 1 en tant que valeur propre et son espace propre est de dimension 1.

Soit $A = (A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = (B_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice strictement positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Q 34.** Montrer que

$$\mathrm{sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - A_{ii}| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |A_{ij}| \right\}.$$

On suppose que, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $|A_{ij}| \leqslant B_{ij}$.

**Q 35.** Montrer que

$$\mathrm{sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\; |z - A_{ii}| \leqslant \rho(B) - B_{ii} \right\}.$$

On pourra considérer un vecteur propre $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ de $B$, strictement positif, associé à la valeur propre $\rho(B)$, et utiliser la matrice $D^{-1}AD$, où $D = \mathrm{diag}(X_1, \ldots, X_n)$.

• • • FIN • • •

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Cette épreuve propose une démonstration du théorème de Perron-Frobenius pour certaines matrices symétriques réelles à coefficients positifs. Une application est proposée en fin de sujet à un théorème dû à Ky Fan.

La partie I est consacrée à des résultats préliminaires présents dans le programme (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, inégalité de Cauchy-Schwarz) ou nécessitant des calculs tout à fait élémentaires. La partie II est consacrée à la réduction des matrices $2 \times 2$ à coefficients strictement positifs, avec un exemple.

La partie III propose l'étude de la notion de rayon spectral pour une matrice complexe et un résultat de convergence associé à cette notion.

Enfin, la partie IV est consacrée à la démonstration du théorème de Perron-Frobenius pour les matrices symétriques réelles à coefficients strictement positifs, puis pour les matrices symétriques réelles dont une des puissances est à coefficients strictement positifs. En toute fin de sujet, un théorème de Ky Fan est proposé en application de ce résultat.

## Analyse globale des résultats

Sur les 3501 copies corrigées, la moyenne constatée, en pourcentage du barème, est de 32,9 %, pour un écart-type de 15,1 %, ce qui permet de considérer le sujet comme de longueur raisonnable, et permettant un niveau de discrimination satisfaisant parmi les candidats. La meilleure copie obtient 83,1 % des points du barème total.

Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur deux points : la connaissance (parfois basique) du cours et la qualité du raisonnement, bien plus que sur le volume traité ou l'originalité des idées.

Concernant le premier point, à titre d'exemple, la question **Q21** (dont la réussite s'appuie essentiellement sur la connaissance du théorème spectral), traitée par la quasi-totalité des candidats, n'a été réussie que par une part significativement minoritaire d'entre eux (moins d'un quart).

Quant au second point, le jury rappelle que la gestion des implications et équivalences dans les raisonnements doit se faire avec la plus grande rigueur : de nombreux candidats tentent de résoudre la première partie de la question **Q8** ou la question **Q24** directement par équivalence, un exercice bien périlleux au vu du raisonnement à maintenir de bout en bout. Ces deux questions auront d'ailleurs été le lieu de grandes différences dans la qualité de l'organisation du raisonnement.

Cette année encore, le soin apporté à la qualité des réponses est un facteur plus décisif dans les résultats finaux que la quantité de questions traitées.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Ce sujet se caractérise par une difficulté progressive et la quasi-absence de questions nécessitant une forte prise d'initiative de la part des candidats. Les domaines mathématiques concernés par ce sujet se concentrent essentiellement autour de l'algèbre bilinéaire et de la réduction des matrices symétriques réelles. La partie III, néanmoins, offre une incursion dans le domaine de la topologie des espaces vectoriels normés. Peu de candidats auront traité l'application proposée en fin de sujet, consacrée à un théorème de Ky Fan sur le spectre des matrices à coefficients strictement positifs.

Le jury a relevé un certain nombre de points généraux dans la correction des copies, et en tire les recommandations suivantes.

- Le jury note **des faiblesses importantes et largement répandues sur des points de cours élémentaires.** L'expression du coefficient général d'un produit matriciel (**Q1**), l'inégalité de Cauchy-Schwarz (**Q2**) et le théorème spectral (**Q21**) sont des résultats centraux encore connus avec trop peu de précision par les candidats.
- **Un enchainement de calculs ou de symboles logiques ne peut constituer une réponse à part entière.** Le jury relève une proportion importante de copies présentant presque systématiquement les réponses de cette manière, avec un maniement souvent bancal des symboles logiques élémentaires (implications, équivalences en particulier), utilisés, à tort, comme des abréviations. Le jury encourage les futurs candidats à davantage rédiger, à subordonner leurs calculs et enchainements logiques à un texte constitué.
- **Les variables utilisées par les candidats sont loin d'être systématiquement déclarées.** Il n'est pas rare de voir apparaitre des indices, des vecteurs colonnes ou des matrices, au milieu d'un raisonnement, sans en avoir constaté la moindre déclaration préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent, ou ce qu'elles désignent. Par exemple, le début de la partie IV (questions **Q23** à **Q26**) demande aux candidats d'introduire leurs propres notations pour cheminer vers le résultat attendu, elles n'auront que très rarement été proprement mises en place.

Le jury rappelle également que les **fautes d'orthographe**, malheureusement nombreuses dans cette épreuve, nuisent au discours et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale (en plus de faire l'objet d'un malus). En particulier, les fautes d'accord, très nombreuses et quasi-systématiques dans bon nombre de copies (citons le malheureusement très fréquent « théorème spectrale »), interrogent quant à l'idée que certains candidats se font de la structure d'une phrase.

D'une manière générale, le jury note de manière importante **des inversions entre conclusions et hypothèses**. Par exemple, dans les questions **Q3** et **Q4**, beaucoup de candidats seront partis de la conclusion à démontrer, pour la démontrer. Supposer que $z$ est un réel positif pour partir de $1+|z| = |1+z|$ et découvrir qu'alors $z$ est un réel positif n'est pas une réponse admissible à la question **Q3**. Ce mode de raisonnement, fondamentalement incorrect, est rencontré à divers endroits du sujet et dans des proportions importantes parmi les candidats.

Voici désormais les remarques du jury, question par question.

- **Q1 :** une question de calcul élémentaire, plutôt bien réussie. Les erreurs constatées ont porté majoritairement sur la confusion entre $X > 0$ (toutes les composantes de $X$ sont strictement positives) et $\exists i \in [\![1;n]\!], X_i > 0$. On note également de nombreuses versions incorrectes du coefficient général d'un produit matriciel, ainsi qu'une confusion entre $AB$ et son coefficient $AB[i,j]$.
- **Q2 :** l'inégalité est mal connue dans de larges proportions (et la valeur absolue est par ailleurs souvent oubliée, dans la version $|\langle X,Y\rangle| \leqslant |X| \cdot |Y|$). Le jury rappelle que l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ce n'est pas l'orthographe de l'inégalité, d'autant plus qu'elle est donnée dans le sujet) ne s'applique pas à des vecteurs à composantes complexes.
- **Q3 :** le jury note de nombreuses erreurs dans la première partie de la question, en raison d'une gestion approximative des modules dans les égalités. Pour cette question, on s'étonne de ne pas avoir

le succès escompté sur un résultat pourtant explicitement au programme (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire).

- **Q4 :** une question souvent abordée, mais très rarement réussie. L'organisation d'un raisonnement par récurrence sur cette question-ci a posé d'importantes difficultés au plus grand nombre.

- **Q5 :** une question globalement bien réussie, et pour laquelle les erreurs se sont essentiellement concentrées sur des fautes de calcul élémentaires (signe, oubli d'un coefficient 2 ou 4).

- **Q6 :** une question globalement bien réussie.

- **Q7 :** de trop nombreux candidats pensent conclure en obtenant $|\lambda| \leqslant \mu$, alors qu'une inégalité stricte était attendue (quand il ne s'agit pas d'une confusion pure et simple entre les deux types d'inégalités). L'examen de la trace, parfois judicieusement effectué, permettait de conclure.

- **Q8 :** établir proprement l'équivalence demandée en première partie de cette question aura posé d'importantes difficultés à la majorité des candidats. Les bonnes réponses sont celles qui auront fait preuve d'organisation dans le raisonnement (disjonction de cas selon la valeur de $\mu$, ou séparation des deux implications). Dans la seconde partie de la question, les candidats confondent souvent $L$ et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors qu'elles ne sont que semblables.

- **Q9** et **Q10 :** dans la première partie de la question **Q9**, les candidats oublient de citer avec précision la stricte positivité des paramètres $\alpha$ et $\beta$ dans leur raisonnement. Les calculs attendus dans les deux questions auront été rarement couronnés de succès.

- **Q11 :** il ne faut pas oublier d'établir les propriétés définissant une norme (positivité, séparation, homogénéité positive et inégalité triangulaire). Le jury note de nombreuses approximations dans la gestion des opérations de maximum pour la sous-multiplicativité de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Enfin, la question **Q1** est parfois utilisée en référence, à tort.

- **Q12 :** très peu de bonnes réponses, intégrant correctement l'inégalité de Cauchy-Schwarz démontrée en question **Q2**. Il est inutile de redémontrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme : l'énoncé demande explicitement de l'admettre. Fait surprenant : on lit de nombreuses fois l'erreur $AB[i,j] = A[i,j]B[i,j]$ même lorsque le calcul a été fait correctement en question **Q1**.

- **Q13 :** comme en **Q11**, il ne faut pas oublier d'établir les propriétés d'une norme.

- **Q14 :** le jury note de manière récurrente l'erreur consistant à penser que toute matrice complexe est diagonalisable.

- **Q15 :** cette question est convenablement traitée à chaque fois que la trigonalisation de $A$ est bien établie, ainsi que le calcul de $A^k$.

- **Q16 :** il ne faut pas oublier de préciser que $N(H) \neq 0$ (voire $N(H) > 0$) avant de diviser dans l'inégalité $N(A)N(H) \leqslant \rho(A)N(H)$. La matrice $H$ est parfois traitée comme un vecteur propre, ce qui rend l'écriture $N(H)$ vide de sens.

- **Q17 :** le calcul a été globalement réussi dans les copies.

- **Q18 à Q20 :** questions assez peu réussies, demandant un effort de synthèse précis et organisé, à partir des questions précédentes (c'est-à-dire une prise de recul sur la stratégie de la démonstration engagée). Il s'agit en particulier de bien comprendre la dépendance entre les diverses variables introduites précédemment (la norme $N$, le réel $\varepsilon$, l'entier $k$). Peu de copies parviennent à produire un raisonnement correct.

- **Q21 :** une question de cours, globalement bien réussie, aux points près suivants *primo*, le théorème spectral s'applique à des matrices symétriques *réelles*, *secundo*, l'information attendue sur les sous-espaces propres est leur orthogonalité deux à deux. Les réponses correctes auront tout de même été valorisées.

- **Q22 :** le caractère diagonalisable de $A$ est un argument décisif pour affirmer que $\rho(A) = 0$ implique $A = 0$ (on notera que l'égalité $\rho(A) = 0$ est vérifiée aussi par les matrices nilpotentes). Attention à ne pas confondre la notion de matrice positive définie dans l'énoncé (c'est-à-dire à coefficients positifs) et la notion usuelle de matrice symétrique positive (c'est-à-dire vérifiant $X^\top AX \geqslant 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$).

- **Q23 :** le calcul de $X^\top AX$, pourtant classique, a été très peu réussi, notamment parce qu'il s'agissait de mettre en place des notations adaptées. L'écart entre les candidats sur ce point s'avère important.

- **Q24 :** le traitement de l'équivalence attendue est très disparate dans les copies, le jury note majoritairement un manque d'organisation dans le traitement des différents aspects de la question. Le sens rétrograde est globalement traité avec succès. L'erreur $XX^\top = 1$ est fréquente : l'objet $XX^\top$, matrice carrée de taille $n$, est à ne pas confondre avec le produit scalaire $X^\top X$ (qui, lui, vaut 1 pour $X$ unitaire).

- **Q25** et **Q26 :** la référence aux questions précédentes est rarement établie avec précision, en particulier la vérification du caractère unitaire des vecteurs auxquels on applique les résultats des questions **Q23** et **Q24** (le vecteur $|X|$ en **Q25** par exemple). En **Q26**, les confusions entre plus grande valeur propre et valeur propre de plus grande valeur absolue (rayon spectral) sont fréquentes. Enfin, il ne faut pas prêter à la notation $|X|$ les mêmes propriétés qu'à la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ (par exemple : $|AX|$ n'est pas égal à $|A||X|$, $X$ non nul n'implique pas $|X| > 0$, etc.).

- **Q27 à Q35 :** questions rarement ou très rarement traitées par les candidats. On obtient de manière récurrente des propositions pertinentes de contre-exemples en **Q31**. En **Q30**, l'inégalité entre dimension du sous-espace propre et multiplicité de la valeur propre est souvent énoncée dans le mauvais sens.

## Conclusion

Il est absolument primordial de se présenter à une épreuve de ce niveau avec une connaissance précise des éléments de cours et une capacité à les manier avec précision et rigueur. Il est également important d'apporter une attention particulière à ce qui semble être considéré par de nombreux candidats – à tort – comme des détails : déclaration des variables, utilisation pertinente des liens logiques (implications, équivalences) et des mots de liaison. Il importe également que les candidats sélectionnent et mentionnent explicitement la totalité des arguments nécessaires pour répondre à chaque question et organisent leur raisonnement avec méthode. Cela pourra par exemple leur éviter d'oublier de traiter certains aspects d'une équivalence ou d'une disjonction de cas. Ce manque de rigueur explique que de nombreux candidats risquent de se retrouver déçus par leur note, s'ils ont eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses sont incomplètes ou insuffisamment précises.

Le jury tient également à rappeler l'impact significatif d'une copie bien présentée, rédigée dans un français correct. Il en aura été tenu compte dans la notation. Les désagréments impliqués par un manquement à ces règles d'usage sont doubles :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait manquer des points importants de la question ou certaines étapes cruciales d'un raisonnement ;
- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative. Pour éviter tout désagrément, le jury recommande aux candidats de soigner leur écriture, de limiter les

ratures, d'éviter de multiplier les insertions plus ou moins lisibles ou les renvois vers une autre page, et d'écrire dans un français correct.

Enfin, il n'est pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon total : il suffit de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur et de précision. Les bonnes et très bonnes copies sont, presque sans exception, de cette sorte. Le jury encourage les futurs candidats à prendre ces bonnes habitudes dans leur préparation.

# Mathématiques 2

PC

2023

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

**Notations**

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ à coefficient réels.

$(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$.

Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial $k$ parmi $n$. On a $\binom{0}{0} = 1$ et $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

$[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre $a$ et $b$. Ainsi, $[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$.

## I Utilisation de séries entières

### I.A – *Une première formule*

**Q 1.** Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

**Q 2.** En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nx^n$.

**Q 3.** Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et que, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}. \tag{I.1}$$

### I.B – *Utilisation d'une famille de polynômes*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

**Q 4.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k$ est définie sur $\left]-1,1\right[$.

**Q 5.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(H_0, \ldots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et qu'il existe une unique famille $(\alpha_{k,0}, \ldots, \alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j$.

**Q 6.** Pour $k \in \mathbb{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.

**Q 7.** Pour tout couple $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que $\alpha_{k,j} = j^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}$.

**Q 8.** Écrire une fonction Python `alpha` qui prend un couple d'entiers $(k,j)$ en paramètre et qui renvoie la valeur de $\alpha_{k,j}$. On supposera avoir accès à une fonction `binome` telle que `binome(n, k)` renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

**Q 9.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel $P_k$ tel que, pour tout $x \in ]-1, 1[$, $f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}.$$

**Q 10.** À l'aide de la fonction Python `alpha`, écrire une fonction Python `P` qui prend l'entier $k$ en paramètre et qui renvoie la liste des coefficients de degré 0 à $k$ de $P_k$.

**Q 11.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.

**Q 12.** Calculer explicitement $P_2$ et $P_3$.

**Q 13.** Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de $P_k$ ainsi que son coefficient dominant.

**Q 14.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in ]0, 1[$, $x^{k+1} P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

**Q 15.** En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, un lien entre les coefficients de degré $j$ et $k+1-j$ de $P_k$.

### *I.C – Une dernière formule*

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$ dont on note $R$ le rayon de convergence.

**Q 16.** Déterminer $R$ et montrer que, pour tout $x \in ]-R, R[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

**Q 17.** Montrer que, pour tout $x \in ]-R, R[ \setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{I.2}$$

**Q 18.** En déduire que, pour tout $x \in ]-R, R[ \setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x} \left( \frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right).$$

**Q 19.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}. \tag{I.3}$$

# II Étude de sommes doubles

On considère dans cette partie des familles de nombres réels indexées par $\mathbb{N}^2$ c'est-à-dire du type $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$. Dans ce contexte, on se demande s'il est possible de définir les quantités $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et si ces quantités, lorsqu'elles sont définies, sont nécessairement égales.

On rappelle et on admet les deux résultats suivants.

- Si $a_{i,j} \geqslant 0$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, alors les deux sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent dans $[0, +\infty]$ et sont égales. En particulier (cas d'une famille sommable de réels positifs), si l'une des sommes est finie, l'autre aussi et elles sont égales.

- (Cas d'une famille sommable de réels quelconques.) Si $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}|$ est finie, alors les sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent et sont égales.

### II.A – Applications

#### II.A.1) Une première application

Soit $x \in \left]-1,1\right[$.

**Q 20.** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}$.

**Q 21.** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$.

#### II.A.2) Une seconde application

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**Q 22.** Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle u_n = n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$.

**Q 23.** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

### II.B – Contre-exemples

#### II.B.1) Un premier contre-exemple

On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ -1 & \text{si } i = j, \\ \dfrac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j. \end{cases}$

**Q 24.** Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

**Q 25.** Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

**Q 26.** A-t-on $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ ?

#### II.B.2) Un second contre-exemple

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par $c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ j & \text{si } i = j, \\ -2i3^{i-j} & \text{si } i < j. \end{cases}$

**Q 27.** Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ et calculer sa valeur.

**Q 28.** Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ converge et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.

**Q 29.** Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$ ?

# III Probabilités

Dans cette troisième partie, toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

La lettre $p$ désigne un nombre réel de l'intervalle $\left]0,1\right[$.

### III.A – Un conditionnement

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi géométrique de paramètre $p$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Soit $Y$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = n]$ est la loi de Poisson de paramètre $n$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = \mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!}.$$

**Q 30.** Déterminer la loi conjointe de $X$ et $Y$.

**Q 31.** Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$ et montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{p}{(1-p)k!} f_k\left(\frac{1-p}{\mathrm{e}}\right),$$

où $f_k$ est la fonction définie en I.B.

**Q 32.** Vérifier que l'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 1$.

**Q 33.** Montrer que $Y$ admet une espérance finie et calculer cette espérance.

**Q 34.** Montrer que $Y$ admet une variance et calculer cette variance.

### III.B – Pile ou face infini

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est $p$. Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 1]$ désigne l'événement « le $n$-ième lancer donne pile » et $[X_n = 0]$ désigne l'événement « le $n$-ième lancer donne face ».

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n$ et $B_n$ par

— $A_n$ : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces » ;

— $B_n$ : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces ».

Par exemple si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), $A_1$ n'est pas réalisé mais $A_2$ et $A_3$ le sont, $B_2$ est réalisé mais $B_1$ et $B_3$ ne le sont pas.

Enfin on définit $C$, « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces ».

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n$ et $B_n$ sont des événements, et que $C$ est un événement.

**Q 35.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $A_n$ à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ et en déduire $\mathbb{P}(A_n)$.

**Q 36.** Montrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles.

**Q 37.** Montrer que $C$ est un événement et que $\mathbb{P}(C) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

**Q 38.** On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$.

**Q 39.** À l'aide notamment de la formule (I.3), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n.$$

**Q 40.** On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}$ (on pourra utiliser la formule (I.2)).

**Q 41.** On suppose que $p = \frac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1$.

• • • FIN • • •

# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le sujet de cette année proposait l'étude de séries doubles provenant pour certaines d'entre elles, comme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n,$$

d'un problème de probabilités associant les nombres de Catalan et le pile ou face infini.

Les polynômes de Hilbert $H_j(X)=\frac{1}{j!}X(X-1)...(X-j+1)$ étaient introduits pour l'étude des séries $f_k(x)=\sum_{n\geqslant 0}n^kx^n$.

Deux questions demandaient des codes en Python menant à l'expression polynomiale de $(1-x)^{k+1}f_k(x)$.

Des exemples montraient l'importance des conditions de signe pour la convergence commutative des séries doubles.

## Analyse globale des résultats

L'analyse statistique des résultats donne une moyenne correspondant à 21,5 % des points du barème. L'écart type de 12,4 % correspond à une épreuve ayant permis une bonne évaluation de la qualité des candidats. La moyenne relativement basse s'explique largement par la longueur du texte et les nombreuses questions difficiles (**Q7**, **Q9**, **Q10**, **Q11**, **Q14**, **Q16**, **Q21**, **Q23**, **Q38**, **Q39**) demandant aux candidats de concevoir une stratégie, même sommaire, pour ensuite la réaliser. Les meilleures copies n'ont pu qu'approcher 70 % des points prévus.

Le sujet comportait effectivement des questions difficiles dès le début, ce qui a contraint les candidats à ne pas les négliger. Dans de nombreuses questions, le résultat n'était pas donné explicitement. Cela a rendu presque invisible un défaut souvent pointé : des copies produisant des résultats demandés à partir de calculs faux.

Des défauts fréquents dans les copies de cette épreuve concernent la rédaction des récurrences, trop souvent bâclée. Il y a clairement un effort à faire sur ce thème. Une autre erreur très présente cette année est la confusion entre fonction polynomiale et polynôme. Seules quelques rares copies font une distinction rigoureuse.

D'autres manques demandant un effort particulier sont signalés dans notre revue des questions.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### I - Utilisation de séries entières

#### I.A - Une première formule

Beaucoup de copies, pourtant bonnes par ailleurs, ne répondent qu'à une partie de la question lorsque celle-ci comporte plusieurs demandes (ici, le rayon **et** la somme d'une série entière).

**Q1.** L'égalité $\sum_{n\geqslant 0} x^n = (1-x)^{-1}$ et le rayon de convergence sont très classiques mais on voit tout de même quelques erreurs, comme la fonction logarithme.

**Q2.** Attention aux erreurs de signe.

**Q3.** Une itération de l'idée de la question précédente. Notons que le membre de droite $k!(1-x)^{-k-1}$ doit être justifié par un argument de récurrence.

### I.B - Utilisation d'une famille de polynômes

**Q4.** La convergence de la série ne devrait pas poser de difficulté particulière mais de nombreux candidats semblent vouloir s'inspirer de ce qui a précédé, souvent sans succès.

**Q5.** L'argument des degrés échelonnés (en fait l'inversibilité d'une matrice triangulaire) ne vaut que si on est explicite sur le fait que $\deg(H_j) = j$.

**Q6.** Une majorité de candidats fait une erreur dans le calcul de $\alpha_{k,0}$ (oubli de $\alpha_{0,0} = 1$). Seules 20 % des copies donnent un traitement satisfaisant de la question.
La question **Q1** « sans justification » devait aussi être comprise comme une incitation à justifier, même brièvement, ce qui est fait dans les autres questions. Ici on demandait autre chose que de simples égalités.

**Q7.** Une première question qui demandait quelque initiative, essentiellement d'évaluer l'égalité de la question **Q5** en $x \in \mathbb{N}$. Seule une copie sur huit parvient à résoudre la question. Beaucoup tentent une récurrence malgré le fait qu'une relation de récurrence se prouve rarement par récurrence.

**Q8.** Une majorité de candidats aborde la question. Les codes proposés pour ce problème très simple sont assez satisfaisants malgré l'oubli trop fréquent des conditions initiales lorsqu'on utilise la récursivité. Rappelons aussi que casse et indentation doivent être clairement indiqués. Certains candidats sont sensibles aux problèmes de complexité (version récursive) et proposent parfois des versions itératives avec mémoïsation/programmation dynamique.

**Q9.** Une question difficile qui a pu dérouter les candidats de par sa place très tôt dans l'énoncé et l'absence d'indication. Elle n'est abordée que par une minorité, les autres candidats sautant souvent alors plusieurs questions.
L'*unicité* d'un polynôme satisfaisant $P_k(x) = (1-x)^{k+1} f_k(x)$ sur l'ensemble infini $]-1, 1[$ est souvent oubliée.
Pour le reste, l'existence de $P_k \in \mathbb{R}[X]$ et l'identité demandée pouvaient être séparées mais la bonne idée était ici de montrer cette identité directement par **Q3** et **Q5**. Notons que la relation de récurrence $\alpha_{k+1,j} = j\alpha_{k,j-1} + j\alpha_{k,j}$ (conséquence de $H_j.(X-j) = H_{j+1}.(j+1)$) permet classiquement une solution plus directe de cette question et de la **Q11**.

**Q10.** Ici beaucoup moins de tentatives, et encore moins de succès, qu'à la question **Q8**. Beaucoup de copies tentent d'abord d'expliciter le coefficient de $X^j$ dans $P_k$ et en cas de réussite partent alors de la formule $\sum_{i=0}^{j} \alpha_{k,i}(-1)^{j-i}\binom{k-i}{j-i}$. Certains candidats ont bien vu qu'une formule moins explicite du type $\sum_{j\geqslant 0}^{k} \alpha_{k,j} \sum_{i=0}^{k-j} (-1)^i \binom{k-j}{i} X^{i+j}$ pouvait aussi se coder et produire un résultat tout aussi satisfaisant.
Beaucoup d'erreurs proviennent toutefois de ces calculs préliminaires pourtant simples.
Pour ce qui est du code on voit parfois apparaitre une indéterminée $X$, ce qui en théorie serait possible à définir mais demanderait un travail préparatoire sur les listes d'un autre ordre de difficulté.

**Q11.** Une question du même niveau de difficulté, élevé, que la **Q9**. Elle est abordée par une majorité de copies dont seul un petit nombre arrive au résultat demandé, le plus souvent en dérivant la relation $P_k = (1-x)^{k+1} f_k$. Un effort payant pour les candidats qui parvenaient à mettre en oeuvre cette idée.

Certaines copies ont établi auparavant la relation bien utile $xf_k'(x) = f_{k+1}(x)$. La possibilité de démontrer et utiliser l'égalité demandée ici comme étape pour **Q9** apparait aussi dans quelques copies.
Pour être complète, la solution de **Q11** devait aussi mentionner que l'égalité de fonctions entrainait une égalité de polynômes.

**Q12.** Une question apparemment facile, abordée dans la plupart des copies mais avec un taux d'échec assez alarmant. À peine une moitié des candidats produisent un calcul sans erreur.

**Q13.** Même remarque qu'à la question précédente avec un taux de réussite encore inférieur. La réponse est relativement facile à deviner à partir de la question précédente et a effectivement une valeur, même sans démonstration, puisqu'elle n'est pas donnée par l'énoncé.

**Q14.** Question difficile demandant un peu d'imagination et pas mal de ténacité. Seules quelques dizaines de copies donnent une démonstration complète.

**Q15.** Une question bien plus facile mais beaucoup moins tentée après l'échec à la précédente. De plus, la question est souvent mal comprise (confusion avec les coefficients devant les termes $X^j(1-X)^{k-j}$) et mal justifiée (considération des fonctions polynomiales sans passer par les polynômes).

### I.C - Une dernière formule

**Q16.** Le critère de d'Alembert est utilisé avec succès par une courte majorité de copies. Toutefois le calcul qui doit suivre s'avère bien difficile. Le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^a$ ne parait pas assez familier pour que les candidats voient tout de suite qu'il fallait partir du terme de droite de l'égalité demandée.

**Q17.** L'idée de considérer $g(x) = \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$ et la dérivée de $x \mapsto xg(x)$ ne rend pas la question plus difficile que la précédente, ce qui peut surprendre. Par contre la nécessité de prendre $x \neq 0$ en fin de raisonnement n'est pas toujours clairement affirmée.

**Q18.** Le produit de Cauchy est utilisé de façon correcte par les candidats qui ont réussi les deux questions précédentes. À $x$ fixé dans $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[ \setminus \{0\}$ les séries numériques sont absolument convergentes. On peut aussi travailler avec des séries entières à condition de considérer $xg(x)$ comme à la question précédente.

**Q19.** Ici aussi pour procéder par identification des coefficients de séries entières il convenait de se placer sur un intervalle non vide $]-R, R[$ et donc de dire un mot sur le cas $x = 0$. Beaucoup de copies oublient ce point.

## II - Étude de sommes doubles

### II.A - Applications

Le rappel du théorème de Fubini dans les cas des séries ne semble pas avoir beaucoup d'influence sur les copies. L'absolue convergence est très rarement invoquée.

**Q20.** Rappelons que le critère de d'Alembert demande de vérifier que les termes sont non nuls. Rappelons aussi que deux séries à termes équivalents ne sont pas nécessairement similaires quant à leur convergence.

**Q21.** Même remarque sur le théorème de Fubini trop rarement invoqué et les hypothèses d'absolue convergence.

**Q22.** Même imprécision concernant la convergence. On voit beaucoup la « recette » consistant à vérifier que $n^2u_n$ tend vers 0 pour en déduire que la série $\sum_n u_n$ converge.

**Q23.** La question est abordée dans la moitié des copies mais la formulation de la question s'avère un piège redoutable. Majorer efficacement le reste $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(1+k)}$ (par exemple par $\sum_{k=n}^{+\infty} k^{-4}$ puis par une intégrale) s'avère très difficile. On voit aussi ici des équivalents appliqués à des sommes infinies. En appliquant le second théorème rappelé par l'énoncé il convenait bien sûr de sommer d'abord dans $[0, +\infty]$. La force de ce théorème sur les doubles sommes à termes positifs se voit également dans le fait que ce calcul résout aussi rétrospectivement la question précédente. Cette remarque s'appliquerait aussi aux questions **Q20** et **Q21** pour justifier l'absolue convergence.

### II.B - Contre-exemples

**Q24.** Cette question et les deux suivantes promettaient un nouveau départ qui s'est avéré parfois illusoire avec un fort taux d'échec. Le plus souvent on attaque le calcul sans s'assurer que la somme existe.

**Q25.** Les calculs présentés comportent beaucoup d'erreurs qu'une relecture patiente auraient permis de corriger. L'enjeu devrait être encore plus clair quand le résultat n'est pas donné.

**Q26.** Notons qu'aucun commentaire n'étant demandé, les correcteurs ne peuvent pas récompenser les copies qui font l'effort de confronter le résultat aux théorèmes rappelés.

**Q27.** Moins abordée, la question montre les mêmes défauts qu'aux questions **Q24** et **Q25**.

**Q28.** Ici des erreurs de calcul bien regrettables et parfois un peu de mauvaise foi pour conclure, le résultat étant fourni par l'énoncé.

**Q29.** Même remarque qu'à la question **Q26**.

## III - Probabilités

### III.A - Un conditionnement

**Q30.** Cette partie III.A est abordée dans deux tiers des copies et le vocabulaire probabiliste parait compris.

**Q31.** Nous avons dit plus tôt que des calculs erronés produisant miraculeusement le bon résultat donnent une bien mauvaise opinion de leur auteur. Mais à l'inverse le candidat qui constate son erreur et la commente même sans la résoudre peut recevoir plus d'indulgence. C'était notamment le cas ici et à la question suivante avec des problèmes de somme commençant à 0 au lieu de 1.

**Q32.** Les tentatives sérieuses s'amenuisent et la question est réussie par seulement une copie sur dix. L'inversion des symboles $\sum$ est très peu justifiée.

**Q33.** Encore moins de tentatives, peu de copies allant au bout d'un calcul pourtant simple. Les candidats tentent de justifier a priori la convergence de la série $\sum_k k\mathbb{P}(Y = k)$. Cela malgré le rappel du programme de PC par l'énoncé : pour les familles positives, le calcul peut être effectué dans $[0, +\infty]$ et la finitude de la somme vaut alors preuve de sommabilité.

**Q34.** Quelques rares candidats résolvent la question.

### III.B - Pile ou face infini

Cette partie III.B suscite aussi l'intérêt des deux tiers des candidats mais le profit est bien moindre.

**Q35.** La coquille de l'énoncé — il fallait lire $X_1 + \cdots + X_{2n}$ au lieu de $X_1 + \cdots + X_n$ — n'a pas paru gêner les candidats qui ont abordé la question. Les correcteurs n'ont pas sanctionné les très rares copies qui faisaient le même lapsus que l'énoncé. La difficulté, légère, résidait plutôt dans la deuxième partie de la question. Les candidats oublient souvent de mentionner l'indépendance pour le résultat ayant trait aux sommes de variables de Bernoulli.

**Q36.** Ici l'intuition est facile et en général correctement exprimée. Mais trop de candidats pensent qu'il suffit d'affirmer que $B_n \cap B_{n+1} = \emptyset$.

**Q37.** Une conséquence facile de ce qui précède pour les 20 % de candidats encore présents à ce point de l'énoncé.

**Q38.** Une question difficile, intéressante mais peu tentée. Des explications souvent confuses (« $A_n = \cup_k B_k \cap A_{n-k}$ » ou variantes) que les correcteurs ont tenté de comprendre avec patience mais qui s'avéraient presque toujours incomplètes.

**Q39.** La question la moins abordée du problème n'est pas la moins intéressante. Grâce aux séries génératrices des questions **Q16** et **Q17**, on montre que les nombres de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ dénombrent les mots de Dick de longueur $2n$, ici assimilés à des tirages à pile ou face. Notons qu'une démonstration directe par dénombrement est possible en commençant par réécrire $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.

**Q40.** Une question assez facile qui a pu récompenser ceux qui sont allés jusque là. On oublie toutefois trop souvent de vérifier que $0 < p(1-p) < 1/4$.

**Q41.** Très peu de réussite même si la question est à peine plus difficile que la précédente.

## Conclusion

L'épreuve n'a pas révélé de lacune particulièrement grave, ceci sur un énoncé assez élémentaire, il est vrai. Les séries entières sont une notion où les candidats ont généralement une intuition et une expérience réelles. La difficulté des questions importantes résidait essentiellement dans les idées qu'il convenait de trouver pour chaque situation. C'est ce qui a incité les candidats à réfléchir un peu plus longuement que d'habitude avant de rédiger, puis à le faire avec plus de soin. Cela a sans doute aidé à prolonger une amélioration de la rédaction des copies perceptible depuis quelques années.

En conclusion le jury est heureux que cet écrit n'ait pas été une épreuve de pure rapidité mais que les candidats aient pu montrer certaines qualités d'initiative et de réflexion.

# Mathématiques 1

**PC**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

2022

**Notations**

Dans tout le problème, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On utilisera les notations matricielles classiques :

— $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles à $n$ lignes ;

— $0_n$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls ;

— $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques ;

— $\mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_1, ..., a_n$ dans cet ordre ;

— $A^\top$ désigne la transposée de la matrice $A$ ;

— $\mathrm{sp}(A)$ désigne le spectre réel de la matrice $A$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de $A$.

Les éléments de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sont assimilés à des réels.

Avec ces notations, le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par $(U \mid V) = U^\top V$.

On note $\|U\|$ la norme euclidienne canonique de $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. On suppose que, pour tout $p \in ]0,1[$, il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p$ mutuellement indépendantes définies sur $\Omega$.

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur $\Omega$, on note $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)$ et $\mathrm{cov}(X, Y)$ respectivement l'espérance de $X$, la variance de $X$ et la covariance de $X$ et $Y$, lorsqu'elles sont définies.

On rappelle la formule

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

**Définition**

Une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthodiagonalisable* s'il existe une matrice diagonale $D$ et une matrice orthogonale $P$ telles que $A = PDP^\top$.

*Orthodiagonaliser* $A$ revient à déterminer un couple de telles matrices $(D, P)$.

# I Généralités sur les matrices symétriques réelles

**Q 1.** Démontrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthodiagonalisable si et seulement si elle est symétrique.

### *I.A – Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$*

On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**Q 2.** En observant la première et la dernière colonne de $A_1$, déterminer un vecteur propre de $A_1$ et la valeur propre $\lambda_1$ associée.

**Q 3.** Déterminer le sous-espace propre de $A_1$ associé à la valeur propre $\lambda_1$ et en déduire le spectre de $A_1$.

**Q 4.** Orthodiagonaliser $A_1$.

### *I.B – Un exemple dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

**Q 5.** Montrer que l'application $\phi : (P, Q) \mapsto \phi(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

**Q 6.** Écrire la matrice $H$ de ce produit scalaire dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire la matrice de terme général $h_{i,j} = \phi(X^i, X^j)$ où les indices $i$ et $j$ varient entre 0 et $n-1$.

**Q 7.** Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Exprimer le produit $U^\top HU$ à l'aide de $\phi$ et des coefficients de $U$.

**Q 8.** Montrer que $H$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont strictement positives.

***I.C –*** ***Rayon spectral***

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de spectre non vide, le *rayon spectral* de $A$, noté $\rho(A)$, est défini par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|.$$

**Q 9.** Montrer que, si $A$ est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = 0_n$, alors le rayon spectral de $A$ est nul.

**Q 10.** On note $C = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1\}$. Démontrer que $C$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**Q 11.** En déduire que l'application : $U \mapsto |U^\top AU|$ admet un maximum sur $C$.

**Q 12.** Montrer que $\rho(A) \leqslant \max\limits_{U \in C} |U^\top AU|$.

***I.D –*** ***Rayon spectral d'une matrice symétrique***

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

**Q 13.** Démontrer que $\rho(A) = \max\limits_{U \in C} |U^\top AU|$.

On suppose de plus que les valeurs propres de $A$ sont toutes positives.

**Q 14.** Montrer alors que $\rho(A) = \max\limits_{U \in C} (U^\top AU)$.

**Q 15.** Démontrer que l'application $\rho$ définit une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

# II Matrice de covariance

Dans la suite du problème, on considère $n$ variables aléatoires discrètes $Y_1, \dots, Y_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles et on définit la fonction $Y$ de $\Omega$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{pmatrix} Y_1(\omega) \\ \vdots \\ Y_n(\omega) \end{pmatrix}.$$

Un tel vecteur aléatoire est dit *constant* si la fonction $Y$ est constante.

Si chacune des variables aléatoires discrètes $Y_i$ admet une espérance finie, on définit le vecteur espérance de $Y$ en posant

$$\mathbb{E}(Y) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(Y_n) \end{pmatrix}.$$

Si toutes les covariances existent, la *matrice de covariance* de $Y$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $\Sigma_Y$, de terme général $\sigma_{i,j} = \mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$.

La *variance totale* de $Y$ est définie par $\mathbb{V}_T(Y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i)$.

Dans la suite du problème, on suppose que $\mathbb{E}(Y)$ et $\Sigma_Y$ sont bien définies.

***II.A –***

On admet que $Y$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On admet aussi que $\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)^\top$ est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont l'espérance, par définition, est également calculée terme à terme.

**Q 16.** Vérifier que $\Sigma_Y$ est une matrice symétrique, que

$$\Sigma_Y = \mathbb{E}\Big(\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)^\top\Big)$$

et que, si $U$ est un vecteur constant dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\Sigma_{Y+U} = \Sigma_Y.$$

**Q 17.** Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On définit la variable aléatoire discrète $Z = MY$, à valeurs dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Justifier que $Z$ admet une espérance et exprimer $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$. Montrer que $Z$ admet une matrice de covariance $\Sigma_Z$ et que

$$\Sigma_Z = M \Sigma_Y M^\top.$$

### *II.B – Propriété des valeurs propres*

On note $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à une base orthonormée formée de vecteurs propres de $\Sigma_Y$.

On définit la variable aléatoire discrète $X = P^\top Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

**Q 18.** Démontrer que $\Sigma_X$ est une matrice diagonale.

**Q 19.** En déduire que les valeurs propres de $\Sigma_Y$ sont toutes positives.

**Q 20.** Démontrer que la variance totale de $X$ est égale à celle de $Y$.

### *II.C – Étude de la réciproque*

Soit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\lambda_i$ sont tous positifs.

**Q 21.** Démontrer l'existence d'une variable aléatoire discrète $Z$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Z = D$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives.

**Q 22.** Démontrer l'existence d'une variable aléatoire discrète $Y$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Y = A$.

***II.D*** – Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit la variable aléatoire discrète $X = U^\top Y$.

**Q 23.** Montrer que $X$ admet une variance et que

$$\mathbb{V}(X) = U^\top \Sigma_Y U.$$

### *II.E – Image de $\Sigma_Y$*

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que

$$\mathbb{P}\big(Y - \mathbb{E}(Y) \in \operatorname{Im} \Sigma_Y\big) = 1.$$

On note $r$ le rang de la matrice de covariance de $Y$.

**Q 24.** Traiter le cas où $r = n$.

On suppose maintenant $r < n$.

**Q 25.** Démontrer que le noyau et l'image de $\Sigma_Y$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $d = \dim \ker \Sigma_Y$ et on considère une base orthonormée $(V_1, ..., V_d)$ de $\ker \Sigma_Y$.

**Q 26.** Démontrer que

$$\forall j \in [\![1, d]\!], \quad \mathbb{V}\Big(V_j^\top\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big) = 0.$$

**Q 27.** En déduire que $\mathbb{P}\Big(V_j^\top\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big) = 0\Big) = 1$.

**Q 28.** Conclure.

# III Maximisation de la variance

Les notations sont celles de la partie II. On cherche un vecteur $U$ unitaire tel que la variance de $U^\top Y$ soit maximale.

Comme en I.C, on note $C = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1\}$.

On note $q_Y$ l'application de $C$ dans $\mathbb{R}$ définie par $q_Y(U) = \mathbb{V}(U^\top Y)$.

### *III.A – Un exemple dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*

On pose $A_2 = \operatorname{diag}(9, 5, 4)$.

**Q 29.** Justifier l'existence d'un vecteur aléatoire dont $A_2$ est la matrice de covariance.

**Q 30.** Dans cette question uniquement, on suppose que $Y$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Y = A_2$. Déterminer le maximum de $q_Y$ sur $C$.

### *III.B – Cas général*

**Q 31.** Dans le cas général, démontrer que la fonction $q_Y$ admet un maximum sur $C$. Préciser la valeur de ce maximum ainsi qu'un vecteur $U_0 \in C$ tel que

$$\max_{U \in C} \mathbb{V}(U^\top Y) = \mathbb{V}(U_0^\top Y).$$

### *III.C – Étude d'un exemple*

On suppose, dans cette sous-partie III.C uniquement, que $\Sigma_Y$ vérifie

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sigma_{i,i} = \sigma^2 \qquad \text{et} \qquad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \implies \sigma_{i,j} = \sigma^2\gamma$$

où $\sigma$ et $\gamma$ sont deux réels strictement positifs.

On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

**Q 32.** Démontrer que $\gamma \leqslant 1$ et exprimer $\Sigma_Y$ en fonction de $J$.

**Q 33.** Déterminer les valeurs propres de $J$ et la dimension de chaque sous-espace propre associé. Déterminer également un vecteur propre associé à sa valeur propre de module maximal.

**Q 34.** Préciser un vecteur $U_0$ unitaire tel que la variance de $Z = U_0^\top Y$ soit maximale.

**Q 35.** Calculer le pourcentage de la variance totale représenté par $Z$, c'est-à-dire le rapport $\dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{V}_T(Y)}$.

***III.D*** – On suppose, dans cette dernière sous-partie, que $\Sigma_Y$ présente $n$ valeurs propres distinctes qu'on classe par ordre strictement décroissant $\lambda_1 > \cdots > \lambda_n$.

On se munit d'un vecteur $U_0$ tel que $\mathbb{V}(U_0^\top Y) = \max\limits_{U \in C} \mathbb{V}(U^\top Y)$.

On note

$$C' = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1 \text{ et } U_0^\top U = 0\}.$$

**Q 36.** Justifier que $q_Y$ admet un maximum sur $C'$.

**Q 37.** Déterminer la valeur de ce maximum et préciser un vecteur $U_1 \in C'$ tel que

$$\max_{U \in C'} \mathbb{V}(U^\top Y) = \mathbb{V}(U_1^\top Y).$$

**Q 38.** Calculer la covariance des variables aléatoires discrètes $U_0^\top Y$ et $U_1^\top Y$ (pour simplifier l'écriture, on pourra supposer $Y$ centrée, c'est-à-dire $\mathbb{E}(Y) = 0$).

*Ces questions de maximisation de la variance sont à la base de la méthode statistique d'analyse en composantes principales. Il s'agit de déterminer, à partir d'un certain nombre de variables aléatoires, des combinaisons linéaires (composantes principales) concentrant le maximum d'information et décorrélées entre elles.*

---

• • • FIN • • •

---

Concours Centrale-Supélec 2022 filière PC

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Cette épreuve constitue une introduction à l'analyse en composantes principales, un domaine des statistiques dans lequel l'analyse spectrale d'une matrice de covariance permet la mise en évidence de *facteurs principaux*. Ceux-ci sont les vecteurs propres de cette matrice, et leur importance est mesurée par la valeur propre (réelle positive) à laquelle ils sont associés. La fin du sujet propose, dans certains cas choisis, une méthode pour la recherche des premiers facteurs principaux d'une matrice de covariance par ordre décroissant d'importance.

La partie I reprend des résultats classiques sur l'orthodiagonalisation des matrices symétriques réelles ainsi que l'étude du rayon spectral $\rho(A)$ d'une telle matrice, établissant l'identité $\rho(A) = \max\limits_{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \|U\|=1} |U^\top AU|$.

La partie II introduit le concept de matrice de covariance associée à un vecteur aléatoire et propose l'étude de ses principales propriétés. On y démontre notamment une formule donnant la matrice de covariance d'une transformation linéaire d'un vecteur aléatoire (question 17), formule utile pour une large partie de la suite du sujet.

Enfin, s'appuyant sur les concepts et propriétés introduits en partie II, la partie III détaille une méthode d'extraction des deux premiers facteurs principaux par optimisation de la fonctionnelle $U \mapsto U^\top \Sigma_Y U$. Le résultat général pour le premier facteur principal est donné en III-B, puis la section III-C se concentre sur l'étude d'un modèle à corrélation uniparamétrée. La section III-D conclut ce sujet en revenant au cas quasi général d'une matrice de covariance présentant des valeurs propres deux à deux distinctes.

## Analyse globale des résultats

Sur les 3454 copies corrigées, la moyenne constatée est de 26,2 % du barème, pour un écart-type de 16,2 %, ce qui permet de considérer le sujet comme de longueur raisonnable, et permettant un niveau de discrimination satisfaisant parmi les candidats. La meilleure copie obtient 90,3 % des points du barème total.

Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur deux points : la connaissance (parfois basique) du cours et la qualité du raisonnement, bien plus que sur le volume traité ou l'originalité des idées.

Concernant le premier point, à titre d'exemple, les questions 1 (dont la réussite s'appuie essentiellement sur la connaissance du théorème spectral) et 5 (demandant d'établir que l'application $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$) ne sont totalement réussies que par une part significativement minoritaire des candidats (un tiers pour Q1 et un quart pour Q5).

Quant au second point, il est important de vérifier la validité des hypothèses permettant l'utilisation d'un résultat précédemment établi. Par exemple, en question 29, la moitié des candidats l'ayant abordée oublient de rappeler la nécessaire positivité des coefficients diagonaux de la matrice $A_2$ avant d'utiliser le résultat de la question 21. Par ailleurs, le jury rappelle que la gestion des implications et équivalences dans les raisonnements doit se faire avec la plus grande rigueur : de nombreux candidats tentent de résoudre la question 1 directement par équivalences sans prêter attention à leur validité. Enfin, la manipulation d'espérances et de covariances (en questions 16 et 17) nécessite d'aborder la question de leur existence, une précaution rarement présente dans les copies.

Cette année encore, le soin apporté à la qualité des réponses est un facteur plus décisif dans les résultats finaux que la quantité de questions traitées. Par exemple, parmi les copies obtenant plus de la moitié des points du barème total, environ 85 % de la note se répartit sur seulement 25 des 38 questions du sujet.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Ce sujet se caractérise par une difficulté progressive et la quasi-absence de questions nécessitant une forte prise d'initiative de la part des candidats. Malgré la présence de notions de probabilités à partir de la question Q16, les domaines mathématiques concernés par ce sujet se concentrent essentiellement autour de l'algèbre bilinéaire et de la réduction des matrices symétriques réelles. Les quelques questions probabilistes (Q21, Q27, Q28 par exemple) sont rarement abordées par les candidats (et, beaucoup plus rarement encore, réussies).

Le jury a relevé un certain nombre de points généraux dans la correction des copies, et en tire les recommandations suivantes.

- Le jury note des *faiblesses importantes et largement répandues sur des points de cours élémentaires.* La question 1 dont la substance repose sur la connaissance de l'énoncé du théorème spectral n'est totalement réussie que dans environ un tiers des copies (pour une question traitée par 90 % des candidats). Plus loin dans le sujet, la question Q5, demandant de vérifier que l'application $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, n'est pleinement réussie que dans un quart des copies (pour une question traitée par 99 % de candidats). Il est par ailleurs faux de croire, comme vu en réponse à la question 16, qu'une variable aléatoire admet une espérance pour la seule raison qu'elle est discrète.

- *Un enchainement de calculs ou de symboles logiques ne peut constituer une réponse à part entière.* Le jury relève une proportion importante de copies présentant presque systématiquement les réponses de cette manière, avec un maniement souvent bancal des symboles logiques élémentaires (implications, équivalences en particulier), utilisés, à tort, comme des abréviations. Le jury encourage les futurs candidats à davantage rédiger, à subordonner leurs calculs et enchainements logiques à un texte constitué.

- *Les variables utilisées par les candidats sont loin d'être systématiquement déclarées.* Il n'est pas rare de voir apparaitre des indices, des polynômes ou des matrices, au milieu d'un raisonnement, sans en avoir constaté la moindre déclaration préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent, ou ce qu'elles désignent. En question 7, notamment, le décalage des indices entre 0 et $n-1$, par contraste avec l'habitude d'indexer les composantes d'un vecteur de 1 à $n$, rend nécessaire ce degré de précision avant le moindre calcul. Un manque de rigueur sur ce plan nuit à la clarté du discours et rend le raisonnement confus.

- *Le jury recommande aux candidats une posture d'humilité*, et notamment de bannir de leur vocabulaire des mots comme « clairement », « trivialement », « évidemment ». Ceux-ci n'apportent rien au contenu mathématique de la copie et ne peuvent jouer qu'en défaveur du candidat, surtout lorsqu'ils sont suivis d'erreurs manifestes ou lorsqu'ils ont pour effet d'éluder des points essentiels à la résolution de la question.

Le jury rappelle également que les *fautes d'orthographe*, malheureusement nombreuses dans les copies, nuisent au candidat et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale (en plus de faire l'objet d'un malus). Citons pour exemple, malheureusement très fréquents : « théorème spectrale », « théorème de transfère », « valeure propre », « la fonction atteind ses bornes », « dévellopement », « il est admit que », etc. La validité d'un raisonnement passe aussi par la correction de la langue employée pour l'exprimer.

Voici désormais les remarques du jury, question par question.

**Q1**. Une question proche du cours pleinement réussie par une proportion relativement peu importante des candidats, en particulier pour l'implication consistant à montrer qu'une matrice symétrique réelle est orthodiagonalisable (terme défini dans l'énoncé), c'est-à-dire diagonalisable en base orthonormée. Les confusions entre la transposée $A^\top$ et l'inverse $A^{-1}$ d'une matrice $A$ sont nombreuses.

**Q2**. Question globalement réussie par les candidats. Toutefois, la piste donnée par l'énoncé de cette question, consistant à comprendre une opération sur les colonnes sous la forme d'une multiplication à droite (ici, par un vecteur colonne), aura été peu comprise par les candidats.

**Q3**. Au moment de conclure quant au spectre de $A_1$, on note beaucoup de calculs faisant intervenir le polynôme caractéristique de la matrice $A_1$, alors qu'il suffisait d'invoquer son caractère diagonalisable et l'invariance de sa trace par similitude. L'utilisation rigoureuse de la trace est relativement rare parmi les candidats.

**Q4**. Le jury note très peu de bonnes réponses à cette question, en particulier quant à l'orthonormalisation d'une base de vecteurs propres. De nombreuses copies se contentent de proposer une base de diagonalisation de la matrice $A_1$ sans se préoccuper de la rendre orthonormale (par exemple en utilisant le procédé de Gram-Schmidt).

**Q5**. Un exemple classique cité au programme, pourtant faiblement réussi par les candidats. La justification du caractère défini positif aura été le lieu de nombreuses approximations.

**Q6**. Question réussie par deux tiers des copies, pleinement valorisée pour le calcul de l'intégrale $\int_0^1 t^{i+j}\,\mathrm{d}t$, un calcul qui aura posé des problèmes à une proportion non négligeable des copies. Les représentations lacunaires de la matrice $H$, non étayées par un calcul explicatif, ne peuvent constituer une réponse pleinement satisfaisante à cette question.

**Q7**. Beaucoup d'approximations de calcul dans la gestion de la somme double, pour une question réussie par un tiers des candidats.

**Q8**. La symétrie de $H$ est traitée par une grande majorité de candidats, mais avec des arguments souvent surprenants (« d'après le dessin de Q6, $H$ est symétrique » ou « $H$ est symétrique donc $H \in S_n(\mathbb{R})$ »). Les autres aspects de la question sont rarement traités et réussis dans les copies (en particulier, les valeurs propres d'une matrice, même symétrique, ne sont pas ses éléments diagonaux).

**Q9**. Il est bon de préciser pour quelle raison une matrice nilpotente admet au moins une valeur propre réelle avant d'en établir la nécessaire nullité. Le jury rappelle que la notion de matrice nilpotente et, à fortiori, tout résultat théorique sur les matrices nilpotentes, est hors programme. De nombreux candidats pensent qu'une matrice nilpotente est diagonalisable, ce qui n'est pourtant vrai que pour la matrice nulle.

**Q10**. Question souvent traitée, où les principaux problèmes sont pour justifier la continuité de l'application $U \mapsto U^\top U$. Beaucoup de candidats pensent que le caractère borné d'une partie de $\mathbb{R}^n$ implique son caractère fermé, ce qui est faux. On rappelle également que $U^\top U$ et $UU^\top$ ne sont pas des matrices de taille identique.

**Q11**. Dans cette question, moins traitée que la précédente, on trouve les mêmes problèmes quant à la continuité de l'application $U \mapsto |U^\top AU|$, ainsi que la référence correcte au théorème des bornes atteintes. Une proportion significative des candidats écrivent, à tort, que l'application $U \mapsto U^\top AU$ est linéaire.

**Q12** à **Q14**. Questions traitées par moins de la moitié des candidats, et réussies uniquement dans les meilleures copies.

**Q15**. Question souvent traitée, rarement réussie, à cause de nombreuses approximations dans la gestion des valeurs absolues. Il ne faut pas non plus oublier que la propriété d'homogénéité à établir pour une norme est une propriété d'homogénéité *positive*, un point qui aura manqué dans de nombreuses copies.

Quant à l'axiome de séparation, il nécessite d'invoquer le caractère diagonalisable d'une matrice symétrique réelle, un argument uniquement rencontré dans les meilleures copies. Enfin, il est faux de croire qu'étant donné deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le spectre de $A+B$ est constitué des sommes $\lambda+\mu$ pour $\lambda$ parcourant le spectre de $A$ et $\mu$ parcourant le spectre de $B$.

**Q16** et **Q17**. Questions souvent traitées, avec une appropriation variable du concept de matrice de covariance. Il ne faut pas oublier d'établir l'existence des espérances et covariances évoquées, un point souvent négligé dans les copies. Par ailleurs, la moindre identité impliquant des vecteurs aléatoires, par exemple $\mathbb{E}(MY) = M\mathbb{E}(Y)$ nécessite de raisonner composante par composante, et ne constitue pas, comme lu dans de nombreuses copies, une extension évidente de la propriété de linéarité de l'espérance.

**Q18**. Question réussie par un tiers des candidats, qui voient le changement de base impliqué par la formule démontrée en Q17 lorsque $M$ est une matrice orthogonale. De nombreux candidats pensent ou laissent entendre que la matrice orthogonale $P$ réalisant le changement de base peut être prise quelconque, ce qui n'est pas le cas.

**Q19** et **Q20**. Questions peu traitées, et peu réussies pour ceux qui s'y attellent. Peu reconnaissent que $\mathrm{cov}(X_i, X_i) = \mathbb{V}(X_i) \geqslant 0$ pour Q19 ou remarquent l'argument d'invariance de la trace par similitude en Q20. On rappelle également qu'une covariance entre deux variables aléatoires n'est pas toujours positive.

**Q21**. Question difficile qui demande d'utiliser la richesse de l'espace probabilisé mentionnée en introduction. Moins de 1 % des copies proposent une solution complète.

**Q22**. Question traitée par moins d'un tiers des candidats, mais davantage réussie que la précédente, certains voyant la déduction qui s'opère à partir de Q20 et de la formule démontrée en Q17.

**Q23**. Peu de réussite (10 % des copies) pour une question se référant presque directement à Q17 et demandant de remarquer la taille $(1, 1)$ de la matrice obtenue.

**Q24**. Question réussie par la moitié des copies s'y étant consacrées (une moitié des candidats).

**Q25** à **Q28**. Questions peu traitées par les candidats, et réussies uniquement dans les meilleures copies. Le jury note de nombreuses confusions entre les notions de supplémentaire et de complémentaire en Q25. La question Q28 est probablement la plus difficile du sujet, demandant la mise en place d'une intersection d'événements et une utilisation judicieuse des questions Q25 à Q27, un raisonnement très rarement rencontré dans les copies.

**Q29**. La référence presque directe à la question Q21 aura été remarquée par une proportion significative de copies.

**Q30** et **Q31**. Questions rarement traitées, avec des références à la partie I, souvent remarquées par les candidats, rarement bien mises en place avec rappel des hypothèses.

**Q32** et **Q33**. L'étude spectrale de la matrice $J$ est abordée dans de nombreuses copies, avec de la réussite et aussi quelques approximations dans le calcul des dimensions des sous-espaces propres.

**Q34** à **Q38**. Questions très rarement abordées par les candidats, avec des solutions proposées uniquement dans les toutes meilleures copies.

## Conclusion

Il est absolument primordial de se présenter à une épreuve de ce niveau avec une connaissance précise des éléments de cours et une capacité à les manier avec précision et rigueur. Il est également important d'apporter une attention particulière à ce qui semble être considéré par de nombreux candidats – à tort – comme des détails : déclaration des variables, utilisation pertinente des liens logiques (implications, équivalences) et des mots de liaison. Il importe également que les candidats sélectionnent et mentionnent explicitement la totalité des arguments nécessaires pour répondre à chaque question. En effet, les correcteurs, à l'écrit (contrairement aux examinateurs, à l'oral), ne peuvent interroger les candidats afin de leur demander d'étayer leurs affirmations ou de les compléter ; il faut donc que tout soit exprimé sur la copie. Ce manque de rigueur explique que de nombreux candidats risquent de se retrouver déçus par leur note, ayant eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses sont incomplètes ou insuffisamment précises.

Le jury tient également à rappeler l'impact significatif d'une copie bien présentée, rédigée dans un français correct. Il en aura été tenu compte dans la notation. Les désagréments impliqués par un manquement à ces règles d'usage sont doubles :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait manquer des points importants de la question ou certaines étapes cruciales d'un raisonnement ;
- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative.

Pour éviter tout désagrément, le jury recommande aux candidats de soigner leur écriture, de limiter les ratures, d'éviter de multiplier les insertions plus ou moins lisibles ou les renvois vers une autre page, et d'écrire dans un français correct.

Enfin, il n'est pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon total : il suffit de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur et de précision. Le jury encourage les futurs candidats à prendre ces bonnes habitudes dans leur préparation. Les bonnes et très bonnes copies sont, presque sans exception, de cette sorte.

# Mathématiques 2

PC

2022

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Ce sujet en trois parties étudie la convergence des polynômes d'interpolation de Lagrange sous différentes hypothèses et aborde le phénomène de Runge.

La partie I est consacrée à l'étude de deux familles de polynômes, les polynômes de Lagrange et les polynômes de Tchebychev.

La partie II donne des résultats généraux de convergence des polynômes d'interpolation de Lagrange pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ ; elle utilise également quelques résultats de la partie I.

Enfin la partie III présente le phénomène de Runge. Elle s'appuie sur les sous-parties III.A et III.B, qui portent sur une intégrale généralisée et sont indépendantes des parties I et II.

**Notations**

Si $k_1$ et $k_2$ sont deux entiers tels que $k_1 \leqslant k_2$, on note $[\![k_1, k_2]\!]$ l'ensemble des entiers $k$ tels que $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$. Pour tout réel $x$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $n$.

## I Étude de deux familles de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_n)$ une famille de $n$ réels deux à deux distincts.

Pour tout $i$ dans $[\![1, n]\!]$, on note $L_i$ le polynôme de degré $n-1$ défini par

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}. \tag{I.1}$$

On dit que $L_1, ..., L_n$ sont les polynômes de Lagrange associés à $a_1, ..., a_n$.

### *I.A – Polynômes de Lagrange*

On définit l'application

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(a_k) Q(a_k) \end{array} \right.$$

**Q 1.** Montrer que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

**Q 2.** Montrer que, pour tout $i$ et $k$ dans $[\![1, n]\!]$,

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Q 3.** Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\langle L_i, P \rangle = P(a_i).$$

**Q 4.** Montrer que la famille $(L_1, ..., L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

**Q 5.** En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i.$$

**Q 6.** Montrer que, pour tout polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $n-2$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)} = 0.$$

***I.B – Polynômes de Tchebychev***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$T_n(X) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} X^{n-2p}(1-X^2)^p.$$

**Q 7.** En développant $(1+x)^n$ pour deux réels $x$ bien choisis, montrer que

$$\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1}.$$

**Q 8.** Montrer que $T_n$ est un polynôme de degré $n$. Expliciter le coefficient dominant de $T_n$.

**Q 9.** Montrer que $T_n$ est l'unique polynôme à coefficients réels vérifiant la relation

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta).$$

**Q 10.** Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $y_{k,n} = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$. Montrer que

$$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \Big(X - y_{k,n}\Big)$$

***I.C –*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $W$ un polynôme unitaire de degré $n$. L'objectif de cette sous-partie est de montrer que

$$\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} \tag{I.2}$$

puis d'étudier dans quel cas on a égalité.

**Q 11.** Montrer que $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1$. En déduire un polynôme unitaire de degré $n$ réalisant le cas d'égalité dans (I.2).

On pose $Q = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n - W$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

**Q 12.** Montrer que $Q$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

**Q 13.** Dans cette question, on montre (I.2) par l'absurde.

— Si on suppose que $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |W(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$, montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Q(z_k)Q(z_{k+1}) < 0$.

— En déduire une contradiction et conclure.

On suppose maintenant que $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |W(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

**Q 14.** Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\frac{Q(z_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (z_k - z_j)} \geqslant 0.$$

**Q 15.** En déduire que $Q = 0$, puis que $W = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$.

On pourra considérer la somme des inégalités de la question précédente et exploiter la question 6 appliquée à des données convenables.

# II Interpolation et convergence des polynômes d'interpolation pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

***II.A – Interpolation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$***

Dans cette sous-partie, $n$ est un entier naturel non nul et $I$ est un segment $[a, b]$, où $a < b$. On considère $n$ nombres réels distincts $a_1 < \cdots < a_n$ de $I$.

On note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $a_1, \dots, a_n$ définis par (I.1) et on note $W = \prod\limits_{i=1}^{n} (X - a_i)$.

Pour toute fonction $f$ définie sur $I$, le polynôme

$$\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) L_i \tag{II.1}$$

est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On l'appelle polynôme interpolateur de Lagrange de $f$ associé à $a_1, ..., a_n$.

**Q 16.** Soit $r$ une une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ et s'annulant en $n+1$ points distincts de $I$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $r^{(n)}(c) = 0$.

**Q 17.** Soit $f$ une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$. Soit $P = \Pi(f)$ le polynôme interpolateur de $f$ associé aux réels $a_1, ..., a_n$, comme défini en (II.1) ci-dessus. Pour tout $x \in I$, montrer qu'il existe $c \in I$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} W(x).$$

Pour $x$ distinct des $a_i$, on pourra considérer la fonction $r$ définie sur $I$ par

$$r(t) = f(t) - P(t) - KW(t)$$

où le réel $K$ est choisi de façon que $r(x) = 0$.

**Q 18.** En déduire que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{M_n (b-a)^n}{n!}$$

où $M_n = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)|$.

### *II.B – Suites de polynômes interpolateurs*

On considère encore un segment $I$ et une fonction $f$ définie sur $I$.

De plus, pour tout entier naturel non nul $n$, on suppose donnés des réels distincts $a_{1,n} < \cdots < a_{n,n}$ de $I$ et on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur de Lagrange de $f$ associé à ces réels $a_{1,n}, ..., a_{n,n}$.

En notant $L_{1,n}, L_{2,n}, ..., L_{n,n}$ les polynômes de Lagrange associés à $a_{1,n}, ..., a_{n,n}$, on a donc

$$\Pi_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{i,n}) L_{i,n} \tag{II.2}$$

et $\Pi_n(f)$ est l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P_n(a_{i,n}) = f(a_{i,n})$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

On s'intéresse à la convergence uniforme sur $I$ vers $f$ de la suite de polynômes $\big(\Pi_n(f)\big)$ pour divers exemples de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

#### II.B.1) Convergence uniforme vers la fonction exponentielle

Dans cette section, $I = [a, b]$, où $a < b$, et $f$ est la restriction à $I$ de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \exp(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur comme défini par (II.2).

**Q 19.** Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $I$.

**Q 20.** Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge uniformément vers $f$ sur $I$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $Q_n$ ne coïncide avec $f$ en aucun point de $I$, sauf peut-être en zéro :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in I \setminus \{0\}, \qquad Q_n(x) \neq \exp(x)$$

#### II.B.2) Convergence uniforme vers une fonction rationnelle

Dans cette section, $a$ est un réel strictement positif et $I = [-a, a]$. Soit

$$f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$$

**Q 21.** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$ et tout $t \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$,

$$f^{(k)}(\tan t) = k! \cos^{k+1}(t) \cos\big((k+1)t + k\pi/2\big).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur de $f$ sur $I$ défini par (II.2).

**Q 22.** Montrer que, si $a < \dfrac{1}{2}$, la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[-a, a]$.

**II.B.3) Cas de la somme d'une série entière**

Soit $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. On pose,

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

**Q 23.** Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-1,1\right[$ et que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left]-1,1\right[, \qquad g^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}.$$

**Q 24.** Soit $r \in \left]0, R\right[$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |c_k| \leqslant \frac{C}{r^k}.$$

**Q 25.** En déduire que pour tout $x \in \left]-r, r\right[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!\, rC}{(r-|x|)^{n+1}}.$$

**Q 26.** On suppose que $a < R/3$. Montrer que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(\Pi_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[-a,a]$.

**II.B.4) Interpolation aux points de Tchebychev**

Cette section reprend l'étude des deux sections précédentes dans le cas de points d'interpolation particuliers, liés aux racines des polynômes de Tchebychev. On considère $a>0$ et $I=[-a,a]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les points de Tchebychev d'ordre $n$ dans $I$ sont :

$$a^*_{k,n} = a\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad \text{pour } k \in [\![1,n]\!].$$

On pose $W^*_n(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - a^*_{k,n})$.

Si $f$ est une fonction définie sur $I$ et si $n\in\mathbb{N}^*$, on définit comme au (II.2) le polynôme interpolateur $P^*_n = \Pi^*_n(f)$ de $f$ aux points de Tchebychev d'ordre $n$.

C'est l'unique polynôme $P^*_n \in \mathbb{R}_{n-1}(X)$ tel que $P^*_n(a^*_{k,n}) = f(a^*_{k,n})$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

**Q 27.** Pour tout $x \in [-a,a]$, montrer que $|W^*_n(x)| \leqslant 2\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$.

**Q 28.** On reprend dans cette question la fonction $f$ étudiée dans la section II.B.2 : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour $x\in\mathbb{R}$. Montrer que, si $a<2$, la suite $(\Pi^*_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[-a,a]$.

**Q 29.** On reprend dans cette question la fonction $f$ somme de série entière étudiée dans la section II.B.3. Montrer que, si $a < 2R/3$, la suite $(\Pi^*_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[-a,a]$.

# III Phénomène de Runge

### *III.A – Étude d'une intégrale généralisée*

Pour tout réel $\alpha>0$, on considère la fonction $h_\alpha : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1-t^2}{\alpha^2+t^2}\right)$.

**Q 30.** Montrer que $h_\alpha$ est une fonction continue décroissante intégrable sur $[0,1[$.

On pose $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

**Q 31.** Justifier que $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t.$

**Q 32.** En déduire que $J_\alpha = 2\ln(2) - \ln(1+\alpha^2) - 2\alpha\arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

**Q 33.** Montrer qu'il existe $\gamma>0$ tel que, pour tout $\alpha\in\left]0,\gamma\right[$, $J_\alpha>0$.

### *III.B – Application à une somme de Riemann*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $]0,1[$ les points $a_{k,n}$ donnés, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, par $a_{k,n} = \dfrac{2k+1}{2n}$ et on pose

$$S_n(h_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(a_{k,n}) = \frac{1}{n}\left(h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + h_\alpha\left(\frac{3}{2n}\right) + \cdots + h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right).$$

**Q 34.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leqslant S_n(h_\alpha) \leqslant \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + \int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Q 35.** En déduire que la suite $\big(S_n(h_\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $J_\alpha$.

**Q 36.** Montrer que, pour $\alpha \in ]0,\gamma[$, la suite $\left(\left|\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-a_{k,n}^2}{\alpha^2+a_{k,n}^2}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

### *III.C – Le phénomène de Runge*

Dans cette sous-partie $I = [-1,1]$ et $\alpha > 0$. On considère

$$f_\alpha : \left|\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\alpha^2+x^2} \end{array}\right.$$

On reprend les points $a_{k,n}$ définis dans la sous-partie III.B :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad a_{k,n} = \frac{2k+1}{2n}.$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ le polynôme interpolateur de $f_\alpha$ aux $2n$ réels $\{\pm a_{k,n} \in I \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$. Autrement dit, $R_n$ est l'unique polynôme de degré au plus $2n-1$ qui coïncide avec $f_\alpha$ aux points

$$-\frac{2n-1}{2n},\ -\frac{2n-3}{2n}, \dots, -\frac{3}{2n},\ -\frac{1}{2n},\ \frac{1}{2n},\ \frac{3}{2n}, \dots, \frac{2n-3}{2n},\ \frac{2n-1}{2n}.$$

On pose $Q_n(X) = 1 - (X^2+\alpha^2)R_n(X)$.

**Q 37.** Montrer que $R_n$ est un polynôme pair et déterminer $Q_n(\alpha\mathrm{i})$.

**Q 38.** Montrer qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [-1,1], \qquad Q_n(x) = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - a_{k,n}^2).$$

**Q 39.** En déduire que, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$f_\alpha(x) - R_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+\alpha^2}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{x^2-a_{k,n}^2}{\alpha^2+a_{k,n}^2}.$$

**Q 40.** On suppose que $\alpha < \gamma$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} |f_\alpha(1) - R_n(1)| = +\infty.$$

---

• • • FIN • • •

---

# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le thème général de cette année est celui de l'approximation des fonctions continues par des polynômes. Le problème proposait d'étudier pour une fonction continue sur un intervalle $f\colon I \to \mathbb{R}$ la convergence uniforme vers $f$ des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à une famille de plus en plus dense de points de $I$.

Dans une première partie, on établit que les polynômes de Tchebychev réalisent le maximum de la norme sur $[-1, 1]$ de la convergence uniforme parmi les polynômes unitaires de degré donné.

La deuxième partie approfondit l'étude de la norme de la convergence uniforme en donnant des majorations faisant intervenir les dérivées d'ordre supérieur. Ces majorations permettent d'établir la convergence uniforme de nombreux développements de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

La troisième partie donne une présentation du phénomène de Runge (1901). Pour une fonction continue $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ et pour des familles finies d'éléments de l'intervalle $[-1, 1]$ de plus en plus denses, la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange de $f$ peut ne pas converger uniformément vers $f$. L'exemple classique ici utilisé est celui de la courbe d'Agnesi $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha^2 + x^2}$ pour un paramètre $\alpha > 0$ assez petit.

Le sujet fait ainsi appel à un large spectre de notions du programme de PC : polynômes et leurs racines, fonctions trigonométriques, primitives, intégrales généralisées, suites de fonctions, séries entières. De plus le problème imposait de retourner souvent à des résultats acquis plus haut dans le texte, demandant au candidat de garder une bonne vue d'ensemble de son travail.

## Analyse globale des résultats

Les familles de points et les équations où elles interviennent requièrent un soin particulier de la part des candidats : indéxation, récurrence (ou non), bornes. Cela n'a pas toujours été le cas. On note par contre une bonne familiarité avec l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, familles libres, produit scalaire).

Comme l'année dernière, les principales faiblesses sont plutôt à rechercher dans le domaine de l'analyse. On a ainsi pu relever que les candidats peinent à justifier la convergence d'intégrale et se montrent souvent fort maladroits quant à l'utilisation des propriétés des séries entières. Même certaines questions élémentaires s'avèrent problématiques dans beaucoup de copies. Ici concrètement pour montrer que $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est $\mathcal{C}^\infty$, ou pour trouver une primitive de $t \mapsto \ln(\alpha^2 + t^2)$. Ce type de questions qui furent des classiques paraissent négligées.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Dans ce qui suit nous commentons le traitement des questions en omettant les moins abordées.

### I Étude de deux familles de polynômes

**Q1**. Quelques rares copies montrent une méconnaissance des critères à vérifier pour justifier qu'une fonction de deux variables est un produit scalaire. Trop de candidats pensent que les éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sont de degré $n-1$ et en viennent à affirmer que si un polynôme de degré $n-1$ admet $n$ racines, alors il est nul. Très peu de copies mentionnent le fait que $P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ réalise une injection de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$, la somme des carrés fournissant un produit scalaire dans ce dernier.

**Q2**. Question presque classique pour la plupart des candidats.

**Q3**. Cette question et la précédente sont sans conteste les plus faciles de l'énoncé.

**Q4**. Attention, de même que toute matrice inversible n'est pas triangulaire, une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ n'est pas nécessairement en degrés échelonnés. Rappelons que comme le dit le programme de PCSI, « toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre ». Trop de candidats ont perdu du temps à le redémontrer.

**Q5**. L'expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée en termes de produit scalaire est souvent redémontrée au prix d'une nouvelle perte de temps. Dans cette question et la précédente on fera attention à la différence entre « orthogonale » et « orthonormée ».

**Q6**. Une question beaucoup moins abordée que les précédentes et avec bien peu de succès. Il semble difficile pour les candidats de penser à considérer le terme de degré $n-1$ dans la formule de la question précédente. Quelques utilisations de la dérivée $(n-1)$-ème.

**Q7**. Un exercice très classique mais où seul un quart des copies donnent une solution correcte, la question des indices s'avérant souvent insurmontable. Notons qu'une preuve plus élémentaire est possible comme conséquence de la relation de Pascal $\binom{n}{2p} = \binom{n-1}{2p-1} + \binom{n-1}{2p}$ en mettant à part les cas $p = 0$ et $2p = n$.

**Q8**. Trop de confusion entre terme de plus haut degré et coefficient du terme de plus haut degré. Rappelons qu'une somme de polynômes de degré $n$ n'est pas forcément de degré $n$.

**Q9**. Une question presque classique, au moins dans sa forme. Si la plupart des copies présentent un début de récurrence, elles se perdent souvent dans des calculs trop compliqués, parfois fantaisistes avec des produits qui deviennent des sommes par exemple. La formule de Moivre parait bien mal connue.

**Q10**. Il est essentiel de montrer, au moins ici mais aussi plus loin à la question 13, que les réels considérés sont distincts.

**Q11**. Une question difficile mais relativement bien traitée par ceux (une moitié des candidats) qui l'ont abordée.

**Q12**. Question facile, au moins pour ceux qui n'en avaient pas été détournés par les précédentes.

**Q13**. Question technique pourtant souvent traitée, mais certains candidats se sont perdus en développant. Le fait que les $z_k$ sont ordonnés et distincts est très rarement évoqué pour conclure, la question 10 semblant avoir joué ce rôle dans l'esprit de certains.

**Q14**. Une question difficile et qui demandait de compléter ce qui avait été fait à la question précédente (signe de $Q(z_k)$).

**Q15**. Des réponses très confuses. Certains candidats se sont égarés en voulant transformer $Q$ en un polynôme de degré $n-2$. Certains candidats ont eu du mal à appliquer la question 6 avec un degré de plus.

### II Interpolation et convergence des polynômes d'interpolation pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

**Q16**. L'idée de la récurrence est aperçue par la plupart des candidats mais une partie d'entre eux invoquent le théorème des valeurs intermédiaires. Ici encore il convenait de raisonner sur des points rangés en ordre croissant.

**Q17**. Une question abordée par seulement une moitié des candidats. Des traitements corrects mais le choix de $K$ et le cas de $x = a_i$ sont souvent éludés cependant.

**Q18**. Beaucoup d'échec à cette question abordée par la moitié des candidats. Des erreurs sur le sup et la majoration de $|W(x)|$, ainsi que dans la manipulation des valeurs absolues. Trop de multiplications membre à membre d'inégalités où les signes des membres sont inconnus.

**Q19**. Beaucoup de candidats oublient de calculer $M_n$ pour conclure.

**Q20**. Une question originale dont se sont détournés la plupart des candidats. Notons que la convergence uniforme sur tout borné des sommes partielles $s_n(x)$ du développement classique de $\exp(x)$, avec clairement $s_n(x) < \exp(x)$ pour tout $x > 0$, donnait le résultat demandé en considérant les polynômes $s_n'(x) = \exp(a_0)\, s_n(x - a_0)$ pour n'importe quel choix de $a_0 < a$.

**Q21**. À noter que beaucoup de candidats ont évoqué un développement en série entière sur $]-1, 1[$ pour justifier que $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La formule demandée ensuite provenait de la dérivation $k$ fois de l'équation $g \circ \tan(t) = t$ pour $g = \arctan$ vérifiant $g' = f$. Quelle que soit la méthode, on voit de grosses erreurs de calcul, la plupart des candidats ne sachant pas dériver une composée de fonctions.

**Q22**. Une autre application presque immédiate du critère établi à la question 18, mais qui n'a été comprise que par très peu de candidats.

**Q23**. Un traitement correct dans l'ensemble.

**Q24**. Une question facile également mais moins abordée.

**Q25**. La difficulté de la question ne doit pas conduire à des arguments difficilement crédibles, comme de dire qu'une inégalité entre fonctions entraine la même inégalité entre leurs dérivéees ! Ici la dérivation des séries entières dans leur disque ouvert de convergence donnait facilement $\dfrac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leqslant \dfrac{C}{r^n} \sum_{k \geqslant n} \binom{k}{n} \left|\dfrac{x}{r}\right|^{k-n}$ par Q24 et on pouvait reconnaitre dans le $\sum$ le cas de $f = g$, puis appliquer Q23.

**Q26**. Une question délicate par son appel à la question 18, les candidats ayant en outre les plus grandes difficultés à majorer.

**Q27**. Même commentaire avec cette fois la question 8, la question n'étant que très peu abordée.

### III Phénomène de Runge

**Q30**. Une des dernières questions très abordées (avec la suivante) mais avec un taux d'échec important. On doit ici déplorer à quel point l'existence d'une intégrale impropre s'avère un problème difficile dès qu'on s'écarte des cas les plus connus. Le fait que ce soit la borne 1 et non la borne 0 qui fasse problème apportant un supplément de déstabilisation. Mais on voit aussi tout simplement des candidats qui déclarent que $f$ étant continue sur $[0, 1[$, elle y est intégrable. Des difficultés également dans le calcul de dérivée que certains ont tenté pour établir la décroissance. Notons que dans le cas présent une justification plus élémentaire était facile.

**Q31**. Une question relativement bien réussie.

**Q32**. Il est surprenant que si peu de candidats arrivent à calculer l'intégrale de $t \mapsto \ln(a^2 + t^2)$ entre 0 et 1. Ce n'est pas forcément l'intégration par partie qui fait problème, mais ensuite la primitive de $t \mapsto t^2/(a^2 + t^2)$. À l'inverse quelques candidats avouent sincèrement que leurs primitives sont fournies par la calculette autorisée.

**Q33**. Très peu de réussite (moins d'un candidat sur 10) à cette question qui demande a priori de retourner à la notion de limite et à prendre l'initiative de calculer la limite de $J_\alpha$ en $0^+$. Noter qu'une approche plus élémentaire pouvait consister à noter la décroissance de $\alpha \mapsto J_\alpha$ (évidente dès la définition ou en Q31) et à évaluer quelques valeurs, $\alpha = 0{,}5$ convenant.

**Q34**. Si la comparaison des intégrales d'une fonction monotone et d'une fonction en escalier est connue, il fallait ici un peu de soin dans la gestion des indices. Cette question, placée loin dans l'énoncé, a été bien peu tentée alors qu'on pouvait attendre au moins une tentative de figure. On voit de fait très peu d'illustration graphique dans les copies, quelle que soit la question (cf. questions 13 et 16).

**Q35**. Le seul point difficile consiste à s'assurer que $\dfrac{1}{n}h_\alpha\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)$ tend bien vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini. Ceci n'a été aperçu que par quelques dizaines de candidats.

**Q36**. Cette question par contre a été mieux comprise par les quelques candidats qui l'ont abordée.

**Q37**. L'argument le plus simple pour la parité de $R_n$ demandait d'invoquer l'unicité des polynômes d'interpolation même si la définition de base du I pouvait donner le résultat au prix d'un peu plus d'effort.

## Conclusion

Le sujet a permis de sonder très largement les connaissances des candidats. Comme on l'a dit plus haut, il en ressort que les principales faiblesses se situent dans le domaine de l'analyse.

Pour ce qui relève de la forme au sens large, on aimerait rappeler à nouveau cette année quelques points.

La *présentation* semble bien s'améliorer du fait de l'officialisation d'une minoration en cas de manquement grave. Par contre on ne saurait trop conseiller aux candidats d'user de *concision*. Moins peut être mieux. Un problème comme celui de cette année ne demande pas d'utiliser 8 copies doubles dont parfois beaucoup de pages blanches, ce type d'excès n'étant pas connu pour impressionner favorablement les correcteurs.

Plus important, on ne saurait trop insister à l'inverse sur la nécessité de *rédiger* ses arguments. La plupart des questions ne se résolvent pas par un simple calcul sans commentaire. Enfin la *sincérité* des calculs et des raisonnements ne devrait faire aucun doute, en particulier quand le résultat ou la conclusion de la question sont fournis par l'énoncé.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

**PC**

4 heures Calculatrice autorisée

2021

Ce sujet est divisé en trois parties.

— Dans la première partie, on étudie une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ qui modélise la trajectoire d'une particule. On s'intéresse en particulier au temps nécessaire pour que la particule revienne pour la première fois à son point de départ, si cela arrive. Pour cela, on introduit une suite de nombres appelés nombres de Catalan et on étudie leurs propriétés.

— Dans la deuxième partie, entièrement indépendante de la première, on s'intéresse au calcul d'un déterminant à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

— Dans la troisième partie enfin, on utilise les résultats des deux premières parties pour calculer deux déterminants associés aux nombres de Catalan.

## I Étude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $\Omega$ et à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mutuellement indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p, \quad \text{où } p \in ]0, 1[.$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modélise la trajectoire aléatoire dans $\mathbb{Z}$ d'une particule située en $S_0 = 0$ à l'instant initial $n = 0$, et faisant à chaque instant $n \in \mathbb{N}$ un saut de $+1$ avec une probabilité $p$ et de $-1$ avec une probabilité $1 - p$, les sauts étant indépendants et $p$ appartenant à $]0, 1[$.

Pour $\omega \in \Omega$, on représente la trajectoire de la particule par la ligne brisée joignant les points de coordonnées $(n, S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$.

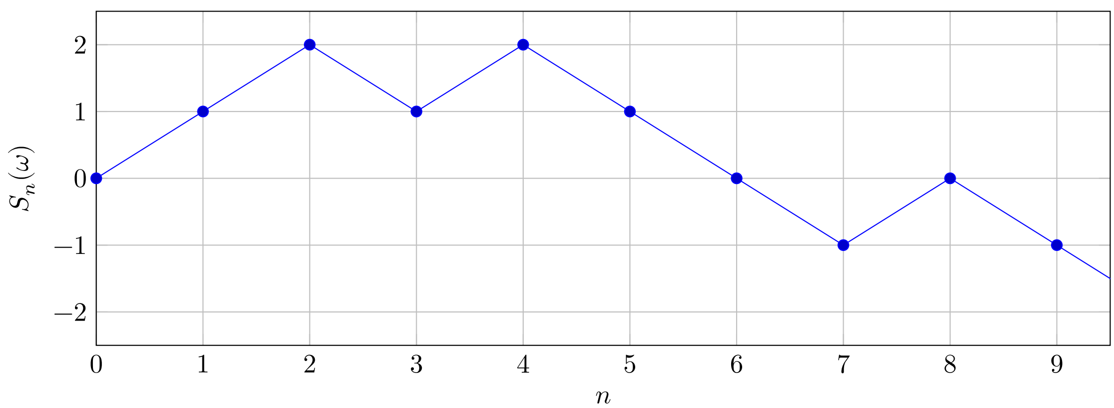


**Figure 1** Exemple de trajectoire possible

### *I.A – Espérance et variance de $S_n$*

Dans cette sous-partie, $n$ désigne un entier naturel non nul.

Soit $Y_n$ la variable aléatoire sur $\Omega$ égale au nombre de valeurs de $k \in [\![1, n]\!]$ telles que $X_k = 1$.

**Q 1.** Quelle est la loi de $Y_n$ ? En déduire l'espérance et la variance de $Y_n$.

**Q 2.** Quelle relation a-t-on entre $S_n$ et $Y_n$ ? En déduire l'espérance et la variance de $S_n$. Justifier que $S_n$ et $n$ ont même parité.

### *I.B – Chemins de Dyck et loi du premier retour à l'origine*

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on appelle chemin de longueur $m$ tout $m$-uplet $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$ tel que $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $\gamma_i \in \{-1, 1\}$.

On pose alors $s_\gamma(0) = 0$ et, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $s_\gamma(k) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i$.

On représente le chemin $\gamma$ par la ligne brisée joignant la suite des points de coordonnées $(k, s_\gamma(k))$, $k \in [\![0, m]\!]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

— on appelle chemin de Dyck de longueur $2n$ tout chemin $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ de longueur $2n$ tel que $s_\gamma(2n) = 0$ et $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $s_\gamma(k) \geqslant 0$ ;

— on note $C_n$ le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$.

On convient de plus que $C_0 = 1$.

La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite des nombres de Catalan. On constate que $C_1 = 1$ et $C_2 = 2$.

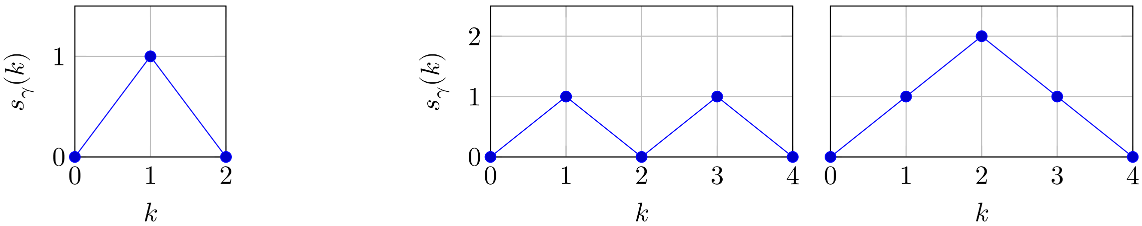


**Figure 2** Représentation des chemins de Dyck de longueurs 2 et 4

**Q 3.** Donner sans démonstration la valeur de $C_3$ et représenter tous les chemins de Dyck de longueur 6.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$ un chemin de Dyck de longueur $2n+2$. Soit $r = \max\{i \in [\![0, n]\!] \mid s_\gamma(2i) = 0\}$. On suppose $0 < r < n$ et on considère les chemins $\alpha = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2r})$ et $\beta = (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1})$.

**Q 4.** Justifier à l'aide d'une figure que $\gamma_{2r+1} = 1$, $\gamma_{2n+2} = -1$ et que $\alpha$ et $\beta$ sont des chemins de Dyck.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ un chemin de longueur $m$.

Pour $t \in \mathbb{N}$, on note $A_{t,\gamma}$ l'événement : « pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $X_{t+k} = \gamma_k$ » ; en d'autres termes,

$$A_{t,\gamma} = \bigcap_{k=1}^{m} (X_{t+k} = \gamma_k).$$

**Q 5.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ un chemin de Dyck de longueur $2n$. Pour $t \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(A_{t,\gamma})$ en fonction de $n$ et $p$.

Soit $T$ la variable aléatoire, définie sur $\Omega$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, égale au premier instant où la particule revient à l'origine, si cet instant existe, et égale à 0 si la particule ne revient jamais à l'origine :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall k \in \mathbb{N}^*, S_k(\omega) \neq 0 \\ \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k(\omega) = 0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

**Q 6.** Montrer que $T$ prend des valeurs paires et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T = 2n+2) = 2\,C_n\,p^{n+1}(1-p)^{n+1}$.

### I.B.1) Série génératrice des nombres de Catalan

**Q 7.** En utilisant la question 4, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \sum_{r=0}^{n} C_r C_{n-r}.$$

**Q 8.** À l'aide de la variable aléatoire $T$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{C_n}{4^n}$ converge.

**Q 9.** En déduire que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} C_n t^n$ converge normalement sur l'intervalle $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

On pose alors, pour tout $t \in I$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n \quad \text{et} \quad g(t) = 2t f(t).$$

On rappelle que la série génératrice de $T$, donnée par $G_T(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) t^n$, est définie si $t \in [-1, 1]$.

**Q 10.** À l'aide des questions précédentes, exprimer $G_T$ à l'aide de $g$ et de $\mathbb{P}(T = 0)$.

**Q 11.** En déduire que si $p \neq \dfrac{1}{2}$, alors $T$ admet une espérance.

**Q 12.** Montrer que $\forall t \in I$, $g(t)^2 = 2g(t) - 4t$.

**Q 13.** En déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \{-1, 1\}$ telle que

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 + \varepsilon(t)\sqrt{1 - 4t}.$$

**Q 14.** Montrer que $\varepsilon$ est continue sur $I \setminus \{\frac{1}{4}\}$. En déduire

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 - \sqrt{1-4t}.$$

**Q 15.** En déduire que $\mathbb{P}(T \neq 0) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$. Interpréter ce résultat lorsque $p = \dfrac{1}{2}$.

**Q 16.** Montrer que si $p = \dfrac{1}{2}$, alors $T$ n'admet pas d'espérance.

### *I.C – Expression des nombres de Catalan et équivalent*

**Q 17.** Justifier l'existence d'une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1},$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $a_n$ à l'aide d'un coefficient binomial.

**Q 18.** En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

**Q 19.** Rappeler l'équivalent de Stirling. En déduire un équivalent de $C_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Q 20.** À partir de la question précédente, retrouver le résultat des questions 11 et 16.

## II Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $G_n$ la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G_n = \Big(\big(X^{i-1}\big|X^{j-1}\big)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (1|1) & (1|X) & \cdots & (1|X^n) \\ (X|1) & (X|X) & \cdots & (X|X^n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X^n|1) & (X^n|X) & \cdots & (X^n|X^n) \end{pmatrix}$$

On cherche à obtenir une expression du déterminant de $G_n$ à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

### *II.A – Définition et propriétés d'un système orthogonal*

Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on appelle système orthogonal toute suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

— $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j \Rightarrow \big(P_i\big|P_j\big) = 0$ ;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n$ est unitaire et de degré $n$.

Dans toute la partie II, on considère un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Q 21.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(V_0, V_1, \dots, V_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$.

**Q 22.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P < n$. Montrer que $(V_n|P) = 0$.

**Q 23.** Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un autre système orthogonal. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = V_n$.

### *II.B – Expression de* $\det G_n$ *à l'aide de la suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $G'_n$ la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G'_n = \Big(\big(V_{i-1}\big|V_{j-1}\big)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (V_0|V_0) & (V_0|V_1) & \cdots & (V_0|V_n) \\ (V_1|V_0) & (V_1|V_1) & \cdots & (V_1|V_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (V_n|V_0) & (V_n|V_1) & \cdots & (V_n|V_n) \end{pmatrix}$$

On note $Q_n = (q_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ la matrice de la famille $(V_0, V_1, \dots, V_n)$ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

**Q 24.** Montrer que $Q_n$ est triangulaire supérieure et que $\det Q_n = 1$.

**Q 25.** Montrer que $Q_n^\top G_n Q_n = G'_n$, où $Q_n^\top$ est la transposée de la matrice $Q_n$.

**Q 26.** En déduire que $\det G_n = \displaystyle\prod_{i=0}^{n} \|V_i\|^2$.

# III Déterminant de Hankel des nombres de Catalan

Dans cette partie, on introduit un produit scalaire particulier sur $\mathbb{R}[X]$ et une suite de polynômes. On vérifie qu'il s'agit d'un système orthogonal pour ce produit scalaire, ce qui permettra d'appliquer les résultats de la partie précédente.

### *III.A – Produit scalaire*

**Q 27.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la fonction $x \mapsto P(4x)Q(4x)\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Dans toute la partie III, on pose

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X], \quad (P|Q) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

**Q 28.** Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

### *III.B – Système orthogonal*

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $U_0 = 1$, $U_1 = X - 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = (X-2)U_{n+1} - U_n$.

**Q 29.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $U_n$ est unitaire de degré $n$, et déterminer la valeur de $U_n(0)$.

**Q 30.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(4\cos^2\theta)\sin\theta = \sin((2n+1)\theta)$.

**Q 31.** Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin((2m+1)\theta)\sin((2n+1)\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

**Q 32.** En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|U_n\| = 1$.
Pour calculer la valeur de $(U_m|U_n)$, on pourra effectuer le changement de variable $x = \cos^2\theta$.

### *III.C – Application*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n = (X^n|1)$.

**Q 33.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4\mu_{n-1} - \mu_n = \frac{2 \times 4^n}{\pi}\int_0^1 x^{n-3/2}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2n-1}\mu_n.$$

**Q 34.** En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = C_n$.

**Q 35.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des parties précédentes la valeur du déterminant

$$H_n = \det(C_{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & \iddots & \iddots & & \iddots & C_{2n-1} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} & C_{2n} \end{vmatrix}$$

### *III.D – Un autre déterminant de Hankel*

Dans cette sous-partie, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n(X) = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-2} & X^{n-1} & X^n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad H'_n = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_2 & \iddots & & \iddots & \iddots & C_{n+1} \\ C_3 & & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & & C_{2n-3} \\ C_{n-1} & \iddots & \iddots & & \iddots & C_{2n-2} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-3} & C_{2n-2} & C_{2n-1} \end{vmatrix}$$

**Q 36.** Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$. Montrer $(D_n|X^k) = 0$.

**Q 37.** En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = U_n$, puis déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur du déterminant $H'_n$.

• • • FIN • • •

Concours Centrale-Supélec 2021 filière PC

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Le sujet de cette épreuve propose le dénombrement des chemins de Dyck, c'est-à-dire des trajectoires sur un axe gradué par $\mathbb{Z}$, de longueur donnée, partant et aboutissant à 0 tout en restant de signe constant. Ce dénombrement fait naturellement apparaitre les nombres de Catalan (qu'on retrouve aussi dans le dénombrement des « bons parenthésages »), qu'on utilise pour deux calculs de déterminant présentant une symétrie particulière (déterminants de Hankel).

La partie I consiste en l'étude du problème de dénombrement des chemins de Dyck, passant par la fonction génératrice de la variable aléatoire $T$ désignant le temps de premier retour à 0 pour une particule effectuant des sauts de $\pm 1$, indépendants et de même loi, sur un axe gradué par $\mathbb{Z}$. Ce calcul mène au calcul explicite des nombres de Catalan $C_n$ et à leur étude asymptotique.

La partie II s'attelle à l'étude des systèmes orthogonaux sur $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire des bases orthogonales de polynômes unitaires. Étant donné un produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_n[X]$, on y montre l'unicité d'un tel système orthogonal et on y effectue le calcul du déterminant de la matrice $(X^{i-1} \mid X^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Ce résultat se révèlera décisif en fin de partie III.

La partie III propose enfin d'appliquer les résultats de la partie II au produit scalaire

$$(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(4t)Q(4t)\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$$

permettant ainsi de faire apparaitre les nombres de Catalan sous la forme $C_n = (X^n \mid 1)$. Cela aboutit au calcul des déterminants de Hankel détaillés en fin de sujet.

## Analyse globale des résultats

Sur les 3381 copies corrigées, la moyenne constatée, en pourcentage du barème, est de 23,7 %, pour un écart-type de 13,7 %, ce qui permet de considérer le sujet comme de longueur raisonnable. Il a par ailleurs permis une bonne discrimination parmi les candidats. Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur le soin apporté aux réponses et sur la solidité des connaissances, bien plus que sur le volume traité ou l'originalité des idées. La meilleure copie a obtenu 81,5 % des points du barème total.

Ce sujet se caractérise par une grande diversité dans les parties du programme qu'il concerne : des probabilités, du dénombrement et des séries entières en partie I, de l'algèbre bilinéaire en parties II et III, et des intégrales généralisées en partie III. Les candidats ont su profiter de cette diversité, chacune de ces parties ayant été abordée par plus de 90 % des copies. Les questions relatives aux déterminants, en fin de sujet, ont été en revanche très peu abordées, car plus difficiles et demandant un effort de synthèse plus important.

La familiarisation avec la situation décrite en partie I (chemins de Dyck, nombres de Catalan) est plutôt réussie. La différence entre les copies se fait essentiellement sur les points suivants, indicatifs du niveau de soin et de discipline pratiqué par les candidats dans leurs raisonnements :

- la connaissance précise du cours ;
- le niveau de rigueur dans la connaissance et le maniement des notions ;
- l'efficacité la ténacité et la précision dans les calculs.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### Remarques générales

Commençons par illustrer les points qui sont apparus comme éléments essentiels de différenciation entre les copies.

- *La connaissance précise du cours.* La toute première question du sujet est un bon indicateur de la disparité des candidats sur ce plan. Un tiers des copies ne parvient pas à reconnaitre, même sans justification, une loi binomiale pour la variable aléatoire $Y_n$. À l'opposé, seulement un sixième des copies parvient à reconnaitre cette loi tout en citant les arguments attendus pour l'établir.

  De même, plus loin dans le sujet, la question **Q9** est le théâtre de nombreuses confusions entre convergence normale et convergence absolue en tout point.

  La question **Q28** est aussi le théâtre de nombreuses approximations quant aux propriétés à vérifier pour un produit scalaire, pourtant proche de l'exemple classique $(P,Q) \mapsto \int_a^b P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}[X]$ (avec $a < b$).

- *Le niveau de rigueur dans la connaissance et le maniement des notions.* Dans des questions parfois élémentaires : dans les questions **Q24** à **Q26**, largement abordées, la nature de la matrice $Q_n$ est un facteur discriminant entre les copies. Environ la moitié des candidats considèrent, à tort, et sans doute troublés par l'écriture ${Q_n}^\top G_n Q_n$, que la matrice $Q_n$ est orthogonale alors que rien ne le laisse entendre dans le sujet.

  La question Q27 met également en évidence une grande disparité entre les candidats : certains établissent la convergence absolue de l'intégrale avec organisation et rigueur, là où d'autres se précipitent vers l'étude d'impropretés plus ou moins réelles (il n'y avait aucun problème en 1), sans parler de continuité par morceaux de la fonction intégrée, ou encore confondant la notion d'intégrabilité avec celle d'intégrale convergente.

- *L'efficacité, la ténacité et la précision dans les calculs.* Les questions **Q17** (développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ sur $]-1,1[$), **Q19** (détermination d'un équivalent de $\binom{2n}{n}$ à partir de l'équivalent de Stirling) et **Q31** (primitivation d'un produit de deux fonctions circulaires) auront permis de mettre en évidence de grandes différences entre les candidats, tant sur l'attention portée à la correction des calculs, que sur leur ténacité et leur efficacité à les faire aboutir.

Le jury a par ailleurs relevé un certain nombre de points généraux lors de la correction des copies et en tire les recommandations suivantes.

Les *études asymptotiques*, mettant en jeu équivalents (**Q19**) ou études d'intégrales impropres (**Q27**), posent de grandes difficultés aux candidats, qui déclarent des équivalents à des quantités potentiellement égales à la fonction nulle, ou invoquent des propriétés fausses, comme l'intégrabilité du produit de deux fonctions intégrables.

Les *variables utilisées sont loin d'être systématiquement déclarées.* Il n'est pas rare de voir apparaitre des $x$, $y$, $t$, $u$, $P$, $Q$ au milieu d'un raisonnement sans en avoir vu la déclaration au préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent, ou ce qu'elles désignent. De telles pratiques nuisent à la clarté du discours et rendent le raisonnement confus. Le jury attend davantage de rigueur de la part des candidats sur ce plan.

*Confusions entre réels et fonctions.* Les confusions entre $f$ et $f(t)$ sont malheureusement fréquentes et répandues. La continuité, la dérivabilité, l'intégrabilité s'appliquent à une fonction et non à son évaluation en un réel $t$ (souvent non déclaré, cf. point précédent).

*Impératif d'intégrité.* Le jury rappelle qu'il est vain, dans une question formulée de manière fermée, d'arranger les calculs de manière malhonnête en vue de trouver le résultat attendu. Par exemple, en question **Q18**, on compte un nombre non négligeable de candidats qui, partant d'une expression fausse concernant $a_n$, parviennent tout de même à la bonne expression de $C_n$ en effectuant des arrangements d'une intégrité douteuse au milieu des calculs. En plus de n'en tirer aucun avantage comptable, un candidat adoptant une telle démarche laisse une impression négative au correcteur.

Le jury recommande aux candidats une *posture d'humilité*, et notamment de bannir de leur vocabulaire des mots comme « clairement », « trivialement », « évidemment ». Ceux-ci n'apportent rien au contenu mathématique de la copie et ne peuvent jouer qu'en défaveur du candidat, surtout lorsqu'ils sont suivis d'erreurs manifestes ou lorsqu'ils servent à passer rapidement sur des points essentiels à la résolution de la question. Par exemple, en question **Q28**, il est peu pertinent de qualifier la bilinéarité ou la symétrie de l'application étudiée d'« évidentes » ou de « triviales », comme cela est écrit dans certaines copies.

Le jury rappelle également que les *fautes de français*, malheureusement nombreuses, nuisent à la copie et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale (en plus de faire l'objet d'un malus). La validité d'un raisonnement passe aussi par la correction de la langue employée pour l'exprimer.

**Remarques par question**

**Q1**. Les arguments justifiant la loi binomiale pour $Y_n$ (car on attend justification, comme dans toute réponse, sauf mention explicite du contraire) sont très rarement tous énoncés : les $X_k$ sont indépendants et de même loi et $Y_n$ décompte le nombre de $X_k$ égaux à 1. La connaissance de l'espérance et de la variance de cette loi n'est également pas générale.

**Q2**. Le jury aura beaucoup rencontré la notation « $\overline{Y_n}$ », censée implicitement désigner le nombre de $X_k$ égaux à $-1$, ou l'écriture « $S_n = \sum_{k=0}^{n}[X_k = 1] - \sum_{k=0}^{n}[X_k = -1]$ ». Ni le complémentaire d'une variable aléatoire, ni la somme d'événements ne possèdent de sens mathématique.

**Q3**. Beaucoup de bonnes réponses dans cette question de compréhension immédiate des notations de l'énoncé.

**Q4**. La maximalité de $r$ est rarement comprise et bien utilisée par les candidats, pour prouver que $\beta$ est bien un chemin de Dyck.

**Q5**. On note des confusions entre « indépendance mutuelle » et « indépendance deux à deux » et des erreurs plus lourdes écrivant la probabilité d'une intersection d'événements mutuellement indépendants comme la *somme* des probabilités de ces événements. Le jury rappelle que l'indépendance mutuelle des événements est un argument capital dans les questions de ce type.

**Q6**. La parité de $T$ est globalement bien justifiée. En revanche, on trouve peu d'explications solides quant à l'expression de la loi de $T$.

**Q7**. Le lien avec la question **Q4** doit être convenablement établi, ainsi que les différents procédés utilisés (somme et produit), par exemple en évoquant une partition du décompte selon l'entier $r$ décrit en **Q4**. Le jury relève peu de réponses complètement satisfaisantes sur cette question.

**Q8**. Beaucoup de candidats cherchent à étudier le terme général de la série, alors que l'expression ou le comportement asymptotique de $C_n$ sont complètement inconnus à ce stade du sujet. C'est la propriété de $\sigma$-additivité de la mesure de probabilité $P$ qui se révèle décisive, peu l'auront vu. Le jury note de nombreuses erreurs de majoration dans les propositions des candidats.

**Q9**. La notion de convergence normale d'une série de fonctions sur l'intervalle $I$ est globalement mal connue des candidats, souvent confondue avec la convergence absolue pour tout $t \in I$. On rappelle que la convergence normale d'une série entière a lieu sur tout segment de l'intervalle *ouvert* de convergence :

ici, la série entière ayant un rayon de convergence de $1/4$, la convergence normale est acquise sur tout segment de l'intervalle $]-1/4, 1/4[$ et pas à priori sur le segment $[-1/4, 1/4]$.

**Q10**. Il s'agit d'un simple calcul, plutôt bien réussi par les candidats. Il est important de relever que $p(1-p)t^2 \in I$ lorsque $t \in [-1, 1]$.

**Q11**. Question difficile et peu traitée, qui demandait du soin dans l'utilisation des résultats du cours. Il s'agit de s'appuyer sur le fait que $T$ admet une espérance si et seulement si $G_T$ est dérivable en 1 et établir soigneusement la dérivabilité de la fonction génératrice $G_T$ en 1.

**Q12**. L'identification d'un produit de Cauchy est au cœur de cette question. Le jury rappelle que le produit de Cauchy n'est pas qu'une formule et qu'il a un cadre théorique de validité : la convergence absolue des deux séries numériques concernées. Cette justification est peu présente dans les copies.

**Q13**. Question globalement bien réussie par les candidats, par résolution d'une équation du second degré à discriminant positif. Le jury relève certaines démarches proposant de montrer que la forme proposée satisfait la même équation fonctionnelle que $g$ : cela constitue une sérieuse erreur de logique, car rien n'assure l'unicité de la solution à une telle équation fonctionnelle (loin s'en faut).

**Q14**. Question subtile et rarement bien traitée par les candidats. Le jury regrette la très rare utilisation du théorème des valeurs intermédiaires pour justifier le caractère constant de la fonction $\varepsilon$ sur l'intervalle $I \setminus \{1/4\}$. Il est également important de préciser le domaine sur lequel on établit une continuité : cette question demande un examen particulier du comportement de $f$, $g$ et $\varepsilon$ en $\pm 1/4$, il faut donc redoubler de précision sur ce plan.

**Q15**. Le cas $p = 1/2$ est largement commenté, plus rarement avec les bons termes : il s'agit de rester sur un registre « presque sûr » plutôt que « sûr » ou « nécessaire ». La particule revient *presque sûrement* à 0 et non *forcément* à 0.

**Q16**. Question de synthèse plutôt difficile, peu traitée par les candidats.

**Q17**. La plupart des candidats connait l'existence d'un développement en série entière pour la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ (valorisé par le jury), mais peu savent en déterminer précisément les coefficients selon les règles de l'énoncé (utilisation d'un coefficient binomial). Le jury rappelle également qu'une fonction $C^\infty$ sur un voisinage de 0 n'est pas nécessairement développable en série entière au voisinage de 0 (argument rencontré dans les copies). La notation $\binom{1/2}{n+1}$ est hors programme. Une expression comme « pour tout $x \in ]-1, 1[$, $f(x)$ est développable en série entière » est impropre. On lui préférera « la fonction $f$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ ».

**Q18**. Question peu traitée par les candidats. Les versions vues ont correctement invoqué le théorème d'unicité des coefficients d'un développement en série entière.

**Q19**. De nombreux candidats ne connaissent pas l'équivalent de Stirling. On voit beaucoup une version inversant le quotient $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ en $\left(\frac{e}{n}\right)^n$ faisant de $n!$ une quantité tendant vers 0.

**Q20**. Question très peu traitée par les candidats.

**Q21**. Une famille orthogonale n'est pas nécessairement libre, il faut aussi qu'elle soit constituée de vecteurs tous non nuls. Ce point est négligé dans de nombreuses copies.

**Q22**. Question globalement réussie, où l'essentiel est d'utiliser la linéarité à droite du produit scalaire sur une décomposition de $P$ sur la base $(V_0, ..., V_{n-1})$.

**Q23**. Question très rarement bien traitée.

**Q24**. Question globalement réussie. Il ne faut toutefois pas penser que les coefficients de la matrice $Q$ sont de la forme $(V_j \mid X^i)$, car la famille $(1, X, ..., X^n)$ n'est pas nécessairement orthonormale pour le produit scalaire utilisé.

**Q25**. Trop de candidats évoquent un changement de base, pensant que la matrice $Q_n$ est une matrice orthogonale, ce qui n'est pas nécessairement le cas (et $\det(Q_n) = 1$ obtenue à la question **Q24** n'est certainement pas un argument suffisant pour cela). Il s'agit plutôt de vérifier l'égalité en effectuant le produit matriciel ${Q_n}^\top G_n Q_n$.

**Q26**. Question globalement bien traitée pour les copies qui ne tombent pas dans l'erreur selon laquelle $G_n$ et $G'_n$ sont des matrices semblables.

**Q27**. Cette question est globalement mal traitée dans les copies. On note des problèmes d'organisation dans l'étude de la nature de l'intégrale impropre : beaucoup de candidats se précipitent sur l'impropreté en 0 sans prendre le temps de parler de la continuité par morceaux de la fonction intégrée, établissent un équivalent de la fonction intégrée à $\frac{P(0)Q(0)}{\sqrt{x}}$ sans prendre garde à l'éventuelle nullité de $P(0)Q(0)$, etc. Le qualificatif « intégrable » est souvent confondu, à tort, avec l'expression « d'intégrale convergente ». Par ailleurs, le produit de fonctions intégrables n'est pas nécessairement intégrable, erreur sérieuse rencontrée dans beaucoup de copies.

**Q28**. La connaissance des propriétés à vérifier pour un produit scalaire est un point de cours mal maitrisé par de nombreux de candidats. Le jury rappelle néanmoins que l'adjectif « linéaire » utilisé seul, est inadapté pour qualifier un potentiel produit scalaire : on lui préférera « linéaire à gauche / à droite » ou « bilinéaire ».

**Q29**. Le jury attire l'attention des candidats sur le soin à apporter à la rédaction de récurrences dites « doubles » (avec double initialisation et hérédité supposant la propriété vérifiées aux rangs $n$ et $n+1$). On rencontre encore beaucoup de versions insuffisantes.

**Q30**. Question peu traitée.

**Q31**. Il est impératif de distinguer les cas $m = n$ et $m \neq n$, en raison d'une division par $m-n$ apparaissant au milieu du calcul.

**Q32**. Le jury rappelle aux candidats l'importance de bien justifier les changements de variable dans des intégrales impropres (caractère $C^1$ et strictement monotone de la fonction de changement, avec précision des domaines concernés par ces propriétés).

**Q33**. Question peu traitée par les candidats.

**Q34** à **Q37**. Questions très rarement traitées par les candidats. Les réponses partielles basées sur des idées constructives ont été valorisées.

## Conclusion

Il est absolument primordial de se présenter à une épreuve de ce niveau avec une connaissance précise des éléments de cours et une capacité à les manier avec précision et rigueur. Il est également important d'apporter une attention particulière à ce qui semble être considéré par de nombreux candidats — à tort — comme des détails : déclaration des variables, utilisation pertinente des liens logiques (implications, équivalences) et des mots de liaison. Il importe également que le candidat vérifie la totalité des hypothèses nécessaires avant utilisation d'un résultat précédemment établi, cela est très loin d'être systématique parmi les copies. Le correcteur, à l'écrit (contrairement à l'examinateur, à l'oral), ne peut interroger le candidat afin de lui demander d'étayer ses affirmations ou de les compléter ; il faut donc que tout soit exprimé sur la copie. Ce manque de rigueur explique que de nombreux candidats risquent de se retrouver déçus par leur note, ayant eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses auront été incomplètes ou insuffisamment précises.

Le jury tient également à rappeler la plus-value importante qu'apportent une rédaction soignée et une copie bien présentée. Il en aura été tenu compte dans la notation. Les désagréments impliqués par un manquement à ces règles sont doubles :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait perdre des points importants de la question ou certaines étapes cruciales d'un raisonnement ;
- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative. Pour éviter tout désagrément, le jury recommande aux candidats de soigner leur écriture, de limiter les ratures, d'éviter de multiplier les inserts plus ou moins lisibles ou les renvois vers une autre page et d'écrire dans un français correct.

Enfin, il n'est pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon total : il suffit de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur et de précision. Nous encourageons les futurs candidats à prendre ces bonnes habitudes dans leur préparation. Les bonnes et très bonnes copies auront, presque sans exception, été de cette sorte.

# Mathématiques 2

**PC**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

2021

Dans tout ce sujet, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $w$ est une fonction continue et strictement positive de $I$ dans $\mathbb{R}$ ; on dit que $w$ est *un poids* sur $I$.

Étant donnée une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $fw$ est intégrable sur $I$, on cherche à approcher l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)w(x)\,\mathrm{d}x$ par une expression de la forme

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans $I$.

Une telle expression $I_n(f)$ est appelée *formule de quadrature* et on note

$$e(f) = \int_I f(x)w(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

l'*erreur de quadrature* associée. On remarque que $e$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions $f$ de $I$ dans $\mathbb{R}$ telles que $fw$ est intégrable sur $I$.

On rappelle qu'un polynôme est dit *unitaire* si son coefficient dominant est 1.

Étant donné un entier $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $m$. On dit qu'une formule de quadrature $I_n(f)$ est *exacte sur* $\mathbb{R}_m[X]$ si,

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad e(P) = 0,$$

ce qui signifie que, pour tout polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $m$,

$$\int_I P(x)w(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x_j).$$

Enfin, on appelle *ordre d'une formule de quadrature* $I_n(f)$ le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel la formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.

Les parties II et III s'appuient sur la partie I et sont indépendantes entre elles.

# I Généralités sur les formules de quadrature

### I.A – *Exemples élémentaires*

Dans cette sous-partie, on se place dans le cas $I = [0,1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. On cherche donc à approcher $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque $f$ est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

**Q 1.** Déterminer l'ordre de la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ et représenter graphiquement l'erreur associée $e(f)$.

**Q 2.** Faire de même avec la formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$.

**Q 3.** Déterminer les coefficients $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ pour que la formule $I_2(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Cette formule de quadrature est-elle d'ordre 2 ?

### I.B – *Construction de formules d'ordre quelconque*

On revient au cas général.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n+1$ points distincts dans $I$, notés $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, et une fonction continue $f$ de $I$ dans $\mathbb{R}$.

**Q 4.** Montrer que l'application linéaire $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), P(x_1), ..., P(x_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

**Q 5.** Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

**Q 6.** Montrer que $(L_0, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Cette base est appelée *base de Lagrange associée aux points* $(x_0, ..., x_n)$.

**Q 7.** On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur $I$. Montrer que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si,

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_j = \int_I L_j(x) w(x) \,\mathrm{d}x.$$

**Q 8.** On se place dans le cas $I = [0, 1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. Déterminer la base de Lagrange associée aux points $(0, 1/2, 1)$ et retrouver ainsi les coefficients de la formule de quadrature $I_2(f)$ de la question 3.

### *I.C – Noyau de Peano et évaluation de l'erreur*

Dans cette sous-partie, on suppose que l'intervalle $I$ est un segment : $I = [a, b]$, avec $a < b$.

Pour tout entier naturel $m$, on considère la fonction $\varphi_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \qquad \varphi_m(x, t) = \begin{cases} (x - t)^m & \text{si } x \geqslant t, \\ 0 & \text{si } x < t. \end{cases}$$

On observe que $\varphi_m$ est continue si $m \geqslant 1$ et discontinue si $m = 0$.

On considère une formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$.

On note $m \in \mathbb{N}$ l'ordre de cette formule et on cherche à évaluer l'erreur associée :

$$e(f) = \int_a^b f(x) w(x) \,\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur $I$.

**Q 9.** À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $e(f) = e(R_m)$, où $R_m$ est définie par

$$\forall x \in [a, b], \quad R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x, t) f^{(m+1)}(t) \,\mathrm{d}t.$$

**Q 10.** En déduire que, si $m \geqslant 1$,

$$e(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t) \,\mathrm{d}t,$$

où la fonction $K_m : [a, b] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall t \in [a, b], \qquad K_m(t) = e(x \mapsto \varphi_m(x, t)) = \int_a^b \varphi_m(x, t) w(x) \,\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_m(x_j, t).$$

On pourra utiliser le résultat admis suivant : pour toute fonction continue $g : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b \left( \int_a^b g(x, t) \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left( \int_a^b g(x, t) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

La fonction $K_m$ est appelée *noyau de Peano associé à la formule de quadrature*.

On admet que cette expression de $e(f)$ reste valable pour $m = 0$.

### *I.D – Exemple : méthode des trapèzes*

Dans cette sous-partie, on suppose que $I$ est un segment et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$.
On se place d'abord dans le cas $I = [0,1]$ et on considère la formule de quadrature

$$I_1(g) = \frac{g(0) + g(1)}{2},$$

qui est d'ordre $m = 1$ (on ne demande pas de le montrer).

**Q 11.** Calculer le noyau de Peano associé $t \mapsto K_1(t)$ et montrer que, pour toute fonction $g$ de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on a la majoration suivante de l'erreur de quadrature associée :

$$|e(g)| \leqslant \frac{1}{12} \sup_{x\in[0,1]} |g''(x)|.$$

On se place maintenant dans le cas d'un segment quelconque $I = [a,b]$ (avec $a < b$), qu'on subdivise en $n+1$ points $a_0, ..., a_n$ équidistants :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \qquad a_i = a + ih,$$

où $h = \dfrac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision.
On considère alors la formule de quadrature

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2},$$

appelée *méthode des trapèzes*. L'erreur de quadrature associée est notée :

$$e_n(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_n(f).$$

**Q 12.** Représenter graphiquement $T_n(f)$.

**Q 13.** On suppose que $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$e_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i),$$

où $e$ est l'erreur associée à la formule de quadrature $I_1$ étudiée à la question 11 et les $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions à préciser.

**Q 14.** En déduire la majoration d'erreur

$$|e_n(f)| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

# II Polynômes orthogonaux et applications

Dans la suite, on note $E$ l'ensemble des fonctions $f$ continues de $I$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f^2 w$ est intégrable sur $I$.

### *II.A – Étude d'un produit scalaire*

**Q 15.** Montrer que, pour toutes fonctions $f$ et $g$ de $E$, le produit $fg\,w$ est intégrable sur $I$.
On pourra utiliser l'inégalité $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, après l'avoir justifiée.

**Q 16.** Montrer que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour toutes fonctions $f$ et $g$ de $E$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Q 17.** Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $E$.

Dans la suite, on munit $E$ de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

### *II.B – Polynômes orthogonaux associés à un poids*

On suppose que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur $I$. Cela entraine par linéarité de l'intégrale que $E$ contient toutes les fonctions polynomiales.

On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n$ est unitaire,

(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(p_n) = n$,

(c) la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, autrement dit $\langle p_i, p_j\rangle = 0$, pour $i \neq j \in \mathbb{N}$.

On dit que les $(p_n)$ sont les *polynômes orthogonaux associés au poids $w$*.

On s'intéresse aux racines des polynômes $p_n$.

On rappelle que $\mathring{I}$ désigne l'intérieur de $I$, c'est-à-dire l'intervalle $I$ privé de ses éventuelles extrémités.

On a donc $\mathring{I} = ]a, b[$, où $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $x_1, ..., x_k$ les racines distinctes de $p_n$ qui sont dans $\mathring{I}$ et $m_1, ..., m_k$ leurs multiplicités respectives. On considère le polynôme

$$q(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{\varepsilon_i}, \quad \text{avec } \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } m_i \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } m_i \text{ est pair.} \end{cases}$$

**Q 18.** En étudiant $\langle p_n, q\rangle$, montrer que $p_n$ possède $n$ racines distinctes dans $\mathring{I}$.

### *II.C – Applications : méthodes de quadrature de Gauss*

Considérons une formule de quadrature

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans $I$.

On suppose que les coefficients $(\lambda_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ sont choisis comme à la question 7 :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_j = \int_I L_j(x) w(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $(L_0, ..., L_n)$ est la base de Lagrange associée aux points $(x_0, ..., x_n)$ (définie dans la partie I).

Ainsi, la formule $I_n(f)$ est d'ordre $m \geqslant n$. Nous allons montrer que dans ces conditions, il existe un seul choix des points $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ qui permet d'obtenir l'ordre $m$ le plus élevé possible.

**Q 19.** En raisonnant avec le polynôme $\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$, montrer que $m \leqslant 2n+1$.

**Q 20.** Montrer que $m = 2n+1$ si et seulement si les $x_i$ sont les racines de $p_{n+1}$.

### *II.D – Exemple 1*

On se place ici dans le cas où $I = [-1, 1]$ et $w(x) = 1$.

On est donc bien dans les conditions d'application des résultats précédemment obtenus.

**Q 21.** Déterminer les quatre premiers polynômes orthogonaux $(p_0, p_1, p_2, p_3)$ associés au poids $w$.

**Q 22.** En déduire explicitement une formule de quadrature d'ordre 5 (on déterminera les points $x_j$ et les coefficients $\lambda_j$).

### *II.E – Exemple 2*

Dans cette sous-partie, $I = ]-1, 1[$ et $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

**Q 23.** Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k w(x)$ est intégrable sur $I$.

Cela entraine que $E$ contient toutes les fonctions polynomiales.

Dans la suite, on considère, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $Q_n : \left|\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(n \arccos(x)) \end{array}\right.$.

**Q 24.** Calculer $Q_0$, $Q_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer simplement $Q_{n+2}$ en fonction de $Q_{n+1}$ et $Q_n$.

**Q 25.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n$ est polynomiale et déterminer son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on notera également $Q_n$ le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui coïncide avec $x \mapsto Q_n(x)$ sur $[-1,1]$.

**Q 26.** On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes orthogonaux associés au poids $w$. Montrer que

$$\begin{cases} p_0 = Q_0, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} Q_n. \end{cases}$$

**Q 27.** Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer explicitement les points $(x_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de $I$ telle que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ soit d'ordre maximal.

# III Accélération de la méthode des trapèzes

On dit qu'une fonction $S$ définie sur une partie de $\mathbb{C}$ est *développable en série entière au voisinage de* 0 s'il existe un disque ouvert $D$ non vide de centre 0 et une suite complexe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall z \in D$, $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$.

## *III.A – Nombres $b_m$ et polynômes $B_m$*

On considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$, de rayon de convergence $R \neq 0$ et avec $\alpha_0 = 1$. On note $S$ la somme de cette série entière sur son disque de convergence : pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$, on a

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n.$$

**Q 28.** Montrer qu'il existe un réel $q > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha_n| \leqslant q^n$.

**Q 29.** On suppose que $\dfrac{1}{S}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et on note $\sum_{n\geqslant 0} \beta_n z^n$ son développement. Calculer $\beta_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\beta_n$ en fonction de $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_{n-1}$.
En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\beta_n| \leqslant (2q)^n.$$

**Q 30.** Montrer que $\dfrac{1}{S}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

**Q 31.** En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe une unique suite complexe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $r > 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$0 < |z| < r \Rightarrow \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

**Q 32.** En effectuant un produit de Cauchy, montrer que $b_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} b_p = 0.$$

**Q 33.** En déduire la valeur de $b_1$, $b_2$, $b_3$ et $b_4$.

**Q 34.** En utilisant un argument de parité, montrer que $b_{2p+1} = 0$ pour tout entier $p \geqslant 1$.

Dans la suite du problème, on considère les polynômes $B_m$ définis par

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad B_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} b_k x^{m-k}.$$

On remarque que chaque polynôme $B_m$ est unitaire de degré $m$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $B_m(0) = b_m$.

**Q 35.** Déterminer $B_0$, $B_1$, $B_2$ et $B_3$.

**Q 36.** Montrer que, pour tout entier $m \geqslant 2$, $B_m(1) = b_m$, puis que, pour tout entier $m \geqslant 1$, $B'_m = mB_{m-1}$.

### III.B – Développement asymptotique de l'erreur dans la méthode des trapèzes

Dans cette sous-partie, on utilise les nombres $b_m$ et les polynômes $B_m$ définis dans la sous-partie III.A pour établir un développement asymptotique à tout ordre de l'erreur de quadrature associée à la méthode des trapèzes (déjà étudiée dans la partie I), pour une fonction suffisamment régulière.

Pour tout réel $x$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère une fonction $g : [0, n] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**Q 37.** Montrer que

$$\int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k)+g(k+1)}{2} - \int_0^n B_1(x - \lfloor x \rfloor) g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Q 38.** En déduire que pour tout entier $m \geqslant 2$,

$$\int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(k)+g(k+1)}{2} + \sum_{p=2}^{m} \frac{(-1)^{p-1} b_p}{p!} \left(g^{(p-1)}(n) - g^{(p-1)}(0)\right) + \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^n B_m(x - \lfloor x \rfloor) g^{(m)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

On considère maintenant une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la formule de quadrature déjà étudiée à la partie I :

$$T_n(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2},$$

(méthode des trapèzes), où $h = \dfrac{b-a}{n}$ et $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $a_i = a + ih$.

**Q 39.** Montrer que, pour tout entier $m \geqslant 1$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = T_n(f) - \sum_{p=1}^{m} \frac{\gamma_{2p}}{n^{2p}} + \rho_{2m}(n),$$

où les coefficients $\gamma_{2p}$ sont donnés par

$$\gamma_{2p} = \frac{(b-a)^{2p} b_{2p}}{(2p)!} \left(f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)\right)$$

et $\rho_{2m}(n)$ est un reste intégral vérifiant la majoration

$$|\rho_{2m}(n)| \leqslant \frac{C_{2m}}{n^{2m}}$$

où $C_{2m}$ est une constante à préciser ne dépendant que de $m$, $a$ et $b$.

On a donc établi, pour tout entier $m \geqslant 1$, le développement asymptotique

$$T_n(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\gamma_2}{n^2} + \frac{\gamma_4}{n^4} + \cdots + \frac{\gamma_{2m}}{n^{2m}} + O_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n^{2(m+1)}}\right),$$

où les coefficients $\gamma_{2p}$ sont indépendants de $n$.

• • • FIN • • •

# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le sujet porte sur un thème assez classique de l'analyse numérique, l'approximation d'une mesure par des évaluations en des points d'un intervalle, ainsi que le test sur les polynômes. On y voit apparaitre les polynômes d'interpolation de Lagrange et les polynômes de Tchebychev. Il y est beaucoup fait appel à l'algèbre linéaire sur l'espace des fonctions numériques continues sur un intervalle. Les séries entières sont aussi un thème important. Les méthodes sont souvent élémentaires et beaucoup de questions peuvent être traitées avec les connaissances de première année.

## Analyse globale des résultats

Sur un sujet relativement long, les nombreux exemples d'applications numériques ont permis aux candidats les moins assurés de s'exprimer et mettre en valeur certaines de leurs compétences.

Il est clair toutefois que l'analyse pose globalement beaucoup de difficultés. Ainsi les candidats peinent à justifier la convergence d'intégrale et se montrent souvent fort maladroits quant à l'utilisation des propriétés des séries entières ou les formules de Taylor. De trop nombreux candidats ont aussi eu du mal à traiter les premières questions et à proposer des illustrations graphiques pertinentes.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Dans ce qui suit nous commentons le traitement des questions en omettant les moins abordées.

### I Généralités sur les formules de quadrature

#### I.A - Exemples élémentaires

Une part surprenante des candidats n'a pas compris et donc pas su entrer dans cette partie. Il semble que les candidats n'aient pas toujours vu ce qu'on attendait d'eux en demandant une illustration graphique.

Ensuite, beaucoup n'ont pas saisi les incitations de l'énoncé à utiliser les propriétés de linéarité de l'opérateur $e$ et à travailler avec la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$.

**Q1**. Les tracés graphiques de cette question et la suivante, censés faciliter la compréhension du sujet, ont trop rarement été satisfaisants.

**Q2**. Des graphiques bien souvent illisibles (seulement un repère ou une simple droite) et des explications parfois confuses.

**Q3**. Plutôt bien traitée, mais la notion d'*ordre* d'une formule de quadrature, introduite par l'énoncé, est mal comprise.

#### I.B - Construction de formules d'ordre quelconque

La structure vectorielle de $\mathbb{R}[X]$ est largement sous-exploitée malgré les rappels de l'énoncé. Le plus souvent, les candidats considèrent le polynôme dans sa forme la plus générale sans recourir à la base canonique par exemple.

Dans **Q5** et **Q6**, les candidats auraient gagné à utiliser le fait que $\varphi$ est un isomorphisme.

**Q4**. Parmi les erreurs fréquentes : « une application linéaire injective en dimension finie est bijective ».

**Q5**. Confusion entre unicité et existence.

Cela réapparait lors de la considération des polynômes de Lagrange (existence, unicité et indépendance). Par ailleurs certains candidats démontrent l'unicité sans l'existence et vice-versa.

**Q6**. Trop de candidats affirment à tort que les $L_i$ sont échelonnés. À noter que l'appartenance de $P$ à $\mathbb{R}_n[X]$ n'implique pas que $P$ soit de degré $n$.

**Q7**. La plupart des candidats ont proposé de démontrer l'implication et la réciproque. La rédaction est souvent longue, confuse et inutilement compliquée, les candidats en venant à écrire apparemment de bonne foi qu'une somme est nulle si et seulement si ses termes sont nuls.

Les candidats auraient dû penser à utiliser la base des $L_i$ et la linéarité de l'erreur $e$ sous la forme $e(f) = 0 \iff e(L_i) = 0$ pour tout $i$.

**Q8**. Une question abordée par un candidat sur deux et plutôt bien traitée, un quart des candidats la traitant de façon complète.

### I.C - Noyau de Peano et évaluation de l'erreur

C'est ici que commencent les difficultés ; cette partie a été assez mal traitée.

**Q9**. La formule de Taylor avec reste intégral, pourtant très sollicitée ces dernières années dans nos sujets, est trop rarement correcte. L'intérêt de la fonction $\varphi$ n'est ici pas vraiment compris, la linéarité de $e$ encore une fois oubliée.

**Q10**. Pas de difficulté pour de nombreuses copies.

### I.D - Exemple : méthode des trapèzes

**Q11**. Des erreurs, faute de comprendre $\varphi_1$. Des majorations trop brutales sur $K_1$.

**Q12**. Des graphiques corrects mais bien souvent une absence d'explication : pas de hachures, pas de bornes $a$ et $b$.

**Q13**. Une simple application de la relation de Chasles qui a posé des difficultés inattendues.

**Q14**. Une autre conséquence facile de ce qui précède mais finalement peu traitée.

## II Polynômes orthogonaux et applications

### II.A - Étude d'un produit scalaire

Cette partie pose essentiellement une question d'algèbre qui a été plutôt bien traitée.

**Q15**. Les arguments de comparaison d'intégrales de fonctions positives et d'intégrale absolument convergentes ne sont presque jamais évoqués.

L'inégalité $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ n'est souvent démontrée que partiellement.

**Q16**. La notion de sous-espace vectoriel est à nouveau souvent oubliée et on lit parfois que $E$ est « inclus » dans $\mathbb{R}$.

**Q17**. Assez bien traitée mais oubli fréquent de la continuité pour prouver le caractère défini.

### II.B - Polynômes orthogonaux associés à un poids

**Q18**. Question très sélective. De nombreux candidats qui l'ont abordée ont supposé que $p_n$ était scindé dans $I$. Mais quelques tentatives intéressantes.

### II.C – Applications : méthodes de quadrature de Gauss

**Q19**. Quelques tentatives mais peu de réussite.

### II.D - Exemple 1

**Q21**. Les calculs ont souvent été menés à bien avec succès.

### II.E - Exemple 2

Cette partie rebute vite la plupart de ceux qui l'abordent et qui essayent ensuite de prendre des points faciles dans le reste du problème.

**Q23**. Question classique mais très mal traitée, la faute à un manque de rigueur préoccupant. Certains candidats utilisent des majorations peu crédibles « $x^k w(x) < x^k$ », ou l'argument « la fonction est continue sur $]-1, 1[$ donc l'intégrale converge ».

**Q24**. Une question difficile puisque la relation de récurrence des polynômes de Tchebychev n'est pas donnée.

**Q25** à **Q27**. Seuls les rares candidats ayant trouvé la relation ont pu aborder ces questions.

## III Accélération de la méthode des trapèzes

Les propriétés des séries entières sont parfois mal assimilées. De nombreux candidats ont voulu appliquer le critère de d'Alembert. Le manque de temps peut aussi expliquer la précipitation et les erreurs.

### III.A – Nombres $b_m$ et polynômes $B_m$

**Q28**. Une question souvent abordée mais faussement facile puisqu'elle ne concerne pas que le comportement de la suite à l'infini, une majoration globale étant demandée.

**Q29**. Les conditions d'application du produit de Cauchy paraissent connues mais de nombreuses erreurs sont commises dans son utilisation. La récurrence forte nécessaire ensuite est trop rarement complète.

**Q30**. Un certain nombre de candidats (20 %) abordent cette question et les deux suivantes, mais le taux d'échec est élevé, peut-être par manque de temps. Pour la question présente, on note une certaine confusion après que la développabilité a été admise auparavant.

**Q31**. Rares sont les copies qui considèrent effectivement pour $S$ le prolongement naturel à $\mathbb{C}$ de $z \mapsto \frac{e^z-1}{z}$.

**Q32**. Un peu mieux réussie que la précédente.

**Q33**. Un calcul facile souvent traité indépendamment du reste par des candidats attentifs.

**Q34**. Cette question est très rarement traitée. La presque parité de la fonction étudiée s'avère mal comprise.

**Q35**. Comme en **Q33**, une occasion de calcul que beaucoup de candidats cherchent à saisir mais sans toujours voir que cette fois on demande des polynômes.

**Q36**. La dernière question abordée par une portion notable des candidats et avec un certain succès.

### III.B – Développement asymptotique de l'erreur dans la méthode des trapèzes

Partie très peu abordée.

## Conclusion

Les polynômes de Lagrange semblent connus sous une forme ou une autre par de nombreux candidats. De façon générale, les méthodes algébriques sont utilisées avec une certaine efficacité. De même les calculs demandés, certes simples, ont été satisfaisants. Mais le domaine le plus faible s'avère finalement l'analyse elle-même où un classique comme la formule de Taylor avec reste intégral demeure mal maitrisé et où une discussion d'intégrales impropres devient périlleuse dès lors que les bornes ne sont ni $0$ ni $+\infty$.

C'est donc finalement en algèbre qu'on voit les raisonnements les plus complets et qu'on peut même noter un effort réel de rédaction et de justification. Par ailleurs, les défauts de présentation nous ont paru moins fréquents qu'auparavant, et le malus prévu à cet effet (qui peut aller jusqu'à 10 %) a été peu utilisé par les correcteurs.

# Mathématiques 1

**PC**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

2020

## *Étude de certaines matrices symplectiques*

L'objet du problème est de définir et étudier la notion de matrice symplectique, et d'établir des résultats de réduction dans certains cas particuliers.

**Vocabulaire et notations**

Dans tout le problème, $n$ désigne un entier naturel non nul et $J_n$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par blocs par

$$J_n = \begin{pmatrix} 0_{n,n} & I_n \\ -I_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $0_{n,n}$ est la matrice nulle à $n$ lignes et $n$ colonnes et $I_n$ est la matrice identité de même taille.

Si $p$ et $q$ sont deux entiers naturels non nuls, la matrice transposée de toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est notée $M^\top$.

On dit qu'une matrice $M$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est *symplectique* si et seulement si $M^\top J_n M = J_n$. On désigne par $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques de taille $2n \times 2n$.

On note $\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle *forme bilinéaire* sur $E$ toute application $\psi$ définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $Y \in E$,

$$X \mapsto \psi(X, Y) \qquad \text{et} \qquad X \mapsto \psi(Y, X)$$

soient toutes les deux linéaires sur $E$.

Soit $\psi$ une forme bilinéaire ; $\psi$ est dite *alternée* si et seulement si, pour tout $X \in E$, $\psi(X, X) = 0$ ; $\psi$ est dite *antisymétrique* si et seulement si, pour tout $(X, Y) \in E^2$, $\psi(X, Y) = -\psi(Y, X)$.

Si $i$ et $j$ sont deux entiers naturels, on note $\delta_{i,j}$ le nombre qui vaut 1 si $i = j$ et qui vaut 0 sinon.

On note $e_i$ la matrice colonne élémentaire dont le seul coefficient non nul vaut 1 et est placé sur la ligne numéro $i$.

On munit $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$. En identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a, pour tous $X$ et $Y$ dans $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X, Y \rangle = X^\top Y \qquad \text{et} \qquad \|X\|^2 = X^\top X.$$

Si $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $X^\perp$ désigne l'orthogonal de $X$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $Y$ de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\langle X, Y \rangle = 0$. Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $F^\perp$ désignera l'orthogonal de $F$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ qui sont orthogonaux à tous les éléments de $F$.

Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, on notera $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de $A$.

Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\lambda$ est une de ses valeurs propres, on notera $E_\lambda$ le sous-espace propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$.

Soit $E$ un espace vectoriel et $X_1, \ldots, X_p$ des vecteurs de $E$. On note $\mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_p)$ l'espace vectoriel engendré par $X_1, \ldots, X_p$.

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $F$ une partie de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. On dit que $F$ est *stable* par $A$ si et seulement si, pour tout $X$ dans $F$, $AX$ est un élément de $F$.

# I Cas des matrices de taille $2 \times 2$

**Q 1.** Dans cette question uniquement, $n$ est un entier naturel non nul quelconque. Déterminer $J_n^2$ et montrer que $J_n \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, $n = 1$.

**Q 2.** Montrer qu'une matrice de taille $2 \times 2$ est symplectique si et seulement si son déterminant est égal à 1.

**Q 3.** Soit $M$ une matrice orthogonale de taille $2\times 2$. On note $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ les deux colonnes de $M$. Montrer l'équivalence

$$M \text{ est symplectique} \iff M_2 = -J_1 M_1.$$

**Q 4.** Soit $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Montrer que la matrice carrée constituée des colonnes $X_1$ et $-J_1 X_1$ est à la fois orthogonale et symplectique.

**Q 5.** Soit $M$ une matrice de taille $2 \times 2$ symétrique et symplectique. Montrer que $M$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont inverses l'une de l'autre. Montrer qu'il existe une matrice $P$ à la fois orthogonale et symplectique telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

**Q 6.** Déterminer les matrices de taille $2 \times 2$ à la fois antisymétriques et symplectiques et montrer qu'elles ne sont pas diagonalisables dans $\mathbb{R}$.

# II Cas des matrices symplectiques et orthogonales

Soit $K$ une matrice antisymétrique et $\varphi$ l'application de $\left(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\right)^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\right)^2, \qquad \varphi(X,Y) = X^\top K Y.$$

(On identifie de nouveau $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.)

**Q 7.** Montrer que $\varphi$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

**Q 8.** En calculant de deux manières $\varphi(X,X)^\top$, montrer que $\varphi$ est alternée. Montrer de même que $\varphi$ est antisymétrique.

Dans toute la suite du sujet, $K = J_n$.

**Q 9.** Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, montrer l'égalité

$$\varphi(X,Y) = \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{k+n} - x_{k+n} y_k).$$

**Q 10.** Montrer que pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,2n\}^2$, $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}$ (on pourra commencer par le cas où $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ puis généraliser).

**Q 11.** Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $J_n X \in X^\perp$ et calculer $\varphi(J_n X, X)$.

**Q 12.** Si $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on note $Y^{J_n}$ l'ensemble des vecteurs $Z$ de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\varphi(Y,Z) = 0$. Montrer que $X^{J_n} = (J_n X)^\perp$.

**Q 13.** Soit $P$ une matrice symplectique et orthogonale dont les colonnes sont notées $X_1, \dots, X_{2n}$. Montrer que, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,2n\}^2$,

$$\begin{cases} \|X_i\| = 1 \\ i \neq j \implies X_i \perp X_j \\ \varphi(X_i, X_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n} \end{cases}$$

**Q 14.** Sous les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $X_i^{J_n} = X_{i+n}^\perp$.

**Q 15.** Sous les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $X_{i+n} = -J_n X_i$.

# III Quelques généralités sur les matrices symplectiques

**Q 16.** Montrer que le déterminant d'une matrice symplectique vaut soit 1 soit $-1$.

**Q 17.** Montrer que l'inverse d'une matrice symplectique est une matrice symplectique.

**Q 18.** Montrer que le produit de deux matrices symplectiques est une matrice symplectique. L'ensemble $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ ?

# IV Réduction des matrices symétriques et symplectiques

Le but de cette partie est de montrer que, si $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $P^\top MP$ est diagonale de coefficients diagonaux $d_1, ..., d_{2n}$ avec pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $d_{k+n} = 1/d_k$.

### *IV.A – Propriété*

Soit $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

**Q 19.** Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $M$, $1/\lambda$ est également valeur propre de $M$. Donner un vecteur propre associé.

**Q 20.** Soit $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M)$ et $p = \dim E_\lambda$. Soit $(X_1, ..., X_p)$ une base de $E_\lambda$. Montrer que $(J_n X_1, ..., J_n X_p)$ est une base de $E_{1/\lambda}$ et que

$$\dim(E_\lambda) = \dim(E_{1/\lambda}).$$

**Q 21.** Soient $Y_1, ..., Y_p$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'implication

$$Y \in \left(\mathrm{Vect}(Y_1, ..., Y_p, J_n Y_1, ..., J_n Y_p)\right)^\perp \implies J_n Y \in \left(\mathrm{Vect}(Y_1, ..., Y_p, Y, J_n Y_1, ..., J_n Y_p)\right)^\perp.$$

**Q 22.** Dans cette question $\lambda = 1$. Montrer que $E_1$ est de dimension paire et qu'il existe une base de $E_1$ orthonormée de la forme $(X_1, ..., X_p, J_n X_1, ..., J_n X_p)$ où $2p$ est la dimension de $E_1$.

**Q 23.** Qu'en est-il pour $E_{-1}$ ?

**Q 24.** Démontrer la propriété annoncée au début de la partie.

### *IV.B – Mise en application sur un exemple*

Dans la fin de cette partie, on note $A$ la matrice

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Q 25.** Montrer que $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$.

**Q 26.** Construire une matrice orthogonale et symplectique $P$ telle que $P^\top AP$ soit diagonale.

# V Étude du cas des matrices antisymétriques

### *V.A – Un peu de théorie*

Soit $M \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit $m$ l'application linéaire canoniquement associée à $M$.

**Q 27.** Montrer l'égalité $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.

**Q 28.** Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $P^\top M^2 P$ soit diagonale de coefficients diagonaux $d_1, ..., d_{2n}$ avec pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $d_{k+n} = 1/d_k$.

Dans toute la suite de cette sous-partie, $X$ désigne un vecteur propre de $M^2$ de norme 1 associé à une certaine valeur propre $\lambda$.

**Q 29.** Montrer que $MX$, $J_n X$ et $J_n MX$ sont des vecteurs propres de $M^2$ et donner les valeurs propres associées à chacun de ces vecteurs.

**Q 30.** Dans cette question et dans la suite, on note $F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_n X, J_n MX)$. Montrer que $F$ est stable par $M$ et par $J_n$.

**Q 31.** Montrer que toutes les valeurs propres de $M^2$ sont strictement négatives.

**Q 32.** Justifier que si $\lambda \neq -1$, $F$ est un espace vectoriel de dimension 4. Montrer que, dans ce cas,

$$\left(X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}} MX, -J_n X, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_n MX\right)$$

est une base orthonormée de $F$. Donner alors la matrice de l'application $m_F$ induite par $m$ sur $F$ dans la base obtenue.

**Q 33.** Montrer que $F^\perp$ est stable par $M$ et par $J_n$.

**Q 34.** Montrer qu'il existe un entier naturel non nul $q$ et des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, notés $F_1, ..., F_q$ tels que

(a) $F_1 \oplus \cdots \oplus F_q = \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ ;

(b) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, $F_i$ est stable par $M$ et par $J_n$ ;

(c) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, $F_i^{\perp}$ est stable par $M$ et par $J_n$ ;

(d) $\forall (i,j) \in \{1, ..., q\}^2$, $i \neq j \implies \forall (Y,Z) \in F_i \times F_j, \langle Y, Z\rangle = 0 = \varphi(Y,Z)$ ;

(e) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, $\dim F_i \in \{2, 4\}$ ;

(f) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, la matrice de l'application $m_{F_i}$ induite par $m$ sur $F_i$ dans une certaine base est de la forme

$$J_1 \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{-\lambda} J_1 & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_1 \end{pmatrix}.$$

### *V.B – Mise en application*

Dans la fin de cette partie, on note $B$ la matrice

$$B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Q 35.** Calculer $B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Q 36.** Déterminer un réel $a$ et une matrice $P$ tels que

$$P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad P^\top B P = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & -1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

---

• • • FIN • • •

---

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Le sujet de cette épreuve propose une étude des matrices symplectiques (réelles) associées à la matrice antisymétrique $J_n = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$, de taille $2n$. Le problème définit la notion de *matrice symplectique* comme toute matrice $M \in M_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\top J_n M = J_n$.

La partie I est consacrée au cas de la dimension 2, proposant une caractérisation générale des matrices symplectiques de taille 2 par leur déterminant. Cette partie propose également une caractérisation des matrices symplectiques orthogonales (Q3 et Q4), symétriques (Q5) et antisymétriques (Q6).

La partie II propose d'étendre le résultat trouvé en Q3-Q4, à propos des matrices symplectiques et orthogonales, aux matrices de taille quelconque. La partie III, très courte, permet de découvrir la structure de groupe (sans la nommer) que possède l'ensemble des matrices symplectiques.

Plus difficile, la partie IV permet d'aboutir à la réduction des matrices symétriques et symplectiques de taille quelconque et la partie V, celle des matrices antisymétriques et symplectiques. Ces parties sont chacune assorties d'une application numérique (Q25-Q26 pour les matrices symétriques, Q35-Q36 pour les matrices antisymétriques).

## Analyse globale des résultats

Sur les 3517 copies corrigées, la moyenne constatée, en pourcentage du barème, est de 21,8 % pour un écart-type de 12,7 %. Le sujet peut donc être considéré comme long, mais il a permis une bonne discrimination parmi les candidats. Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur le soin apporté aux réponses, bien plus que sur le volume traité. La meilleure copie a obtenu 81 % des points du barème total.

Les parties I et II ont été abordées par la quasi-totalité des candidats (plus de 99 % d'entre eux). Il en est presque de même pour les parties III et IV (entamées par plus de 90 % des copies) et la partie V a été légèrement plus délaissée (76 % des copies). Les parties IV et V proposent des questions d'application numérique (Q25 et Q35) pouvant être traitées indépendamment du reste du sujet, ce qui explique ces chiffres.

La notion de matrice symplectique, certainement nouvelle pour la grande majorité des candidats, a été plutôt bien prise en charge par ceux-ci, malgré certaines généralisations hâtives du cas de la dimension 2 (partie I) au cas général (partie II et suivantes). À l'inverse, on note quelques malentendus surprenants sur les notions de matrice symétrique ou antisymétrique, pourtant certainement étudiées en classe et rappelées en début de sujet.

La différence entre les copies se fait essentiellement sur les trois points suivants, indicatifs du niveau de soin et de discipline pratiqué par les candidats dans leurs raisonnements :

- la **rigueur logique**, en particulier le maniement soigneux des implications et des équivalences, ainsi que des quantificateurs — on note trop de confusions dans ce domaine, ce qui porte préjudice dès le début du sujet (questions Q2 et Q3) ;
- des **vérifications de non nullité** — avant de diviser par une quantité, il importe de vérifier (voire justifier) qu'elle est bien non nulle (cf. remarques détaillées, plus loin) ; par ailleurs, la notion de

vecteur propre comporte une exigence de non nullité. De nombreuses questions de ce sujet appellent ce genre de vérification ;

- la **connaissance précise de notions de base** du programme — matrice symétrique, antisymétrique, application linéaire (question Q7), transposition / inversion d'un produit matriciel $(AB)^\top = B^\top A^\top$ et non $A^\top B^\top$), condition nécessaire et suffisante sur les colonnes d'une matrice pour qu'elle soit orthogonale (question Q4 et analogues), notions de famille libre / génératrice / base (question Q20 notamment : la concaténation de deux bases d'un espace non nul ne peut former une base de cet espace).

Le jury reste surpris que les trois points ci-dessus constituent les principaux facteurs de discrimination parmi les candidats, à ce niveau d'études scientifiques. Il est donc important que les futurs candidats en prennent bonne note en vue des prochaines éditions.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury a relevé un certain nombre de points généraux, dans la correction des copies et en tire les recommandations suivantes.

- **Attention aux divisions par zéro.** Aux questions Q3, Q16, Q19, le candidat était souvent amené à simplifier par des quantités abstraites. Le jury regrette que la plupart d'entre eux aient procédé à ces simplifications sans même s'inquiéter de la non-nullité de la quantité simplifiée. Par exemple, à la question Q16, l'écriture $\det(M)\det(J_n)\det(M) = \det(J_n)$ donnait, dans beaucoup de copies, $\det(M)^2 = 1$ à l'étape suivante, sans la moindre discussion quant à la non-nullité de $\det(J_n)$ qui, pourtant, réclamait une justification. De même, à la question Q19, l'écriture $\lambda M J_n X = J_n X$ devenait $M J_n X = \dfrac{1}{\lambda} J_n X$ sans la moindre attention à la non-nullité de $\lambda$ qui, ici encore, méritait une justification, liée à l'inversibilité de la matrice symplectique $M$.

- **Les variables utilisées par les candidats sont loin d'être systématiquement déclarées.** Il n'est pas rare de voir apparaitre des $X$, $Y$, $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ au milieu d'un raisonnement sans en avoir vu la déclaration au préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent, ou ce qu'elles désignent. De telles pratiques nuisent à la clarté du discours et affaiblissent considérablement le raisonnement, le rendant confus. Le jury attend davantage de rigueur de la part des candidats sur ce plan.

- **La calculatrice étant autorisée,** il est tout à fait pertinent d'y recourir pour les questions numériques (Q25, Q26, Q35, Q36), or une large proportion de candidats n'y pense pas. Parmi ceux qui semblent l'utiliser, très peu sont ceux qui s'en servent pour déterminer des valeurs propres et des vecteurs propres, comme demandé aux questions Q26 et Q36. Pourtant, nombreuses sont les calculatrices qui le permettent et il pourrait être profitable aux futurs candidats de se familiariser avec de telles fonctionnalités.

- **Inclusion / appartenance.** On voit beaucoup le symbole d'inclusion à la place du symbole d'appartenance (et vice versa).

- **Vecteurs propres.** La notion de vecteur propre comporte une exigence de non-nullité, qui est étonnamment peu vérifiée par les candidats (questions Q19, Q27, Q29).

- **La manipulation des équivalences** doit se faire avec le plus grand soin. *Primo*, l'écriture du symbole « $\Leftrightarrow$ » ne se fait que si les implications $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$ sont vérifiées : moins de la moitié des candidats s'en préoccupent avec soin. *Secundo*, lorsque des questions comme Q2 et Q3 demandent la démonstration d'une équivalence, il faut bien veiller à ce que la réponse s'en occupe. Par exemple, conclure Q2 sur le fait que « $M$ est symplectique si $\det(M) = 1$ », conclusion trouvée dans nombre de copies, ne peut constituer une réponse satisfaisante.

- **En guise de contre-exemples,** les candidats préfèrent laisser des réponses impliquant des paramètres qui, s'ils sont bien choisis, ne constituent plus un contre-exemple à l'affirmation étudiée. Cette remarque concerne principalement la Q18, dans laquelle, pour démontrer l'absence de structure d'espace vectoriel, certains candidats ont choisi $a, b \in \mathbb{R}, M, N$ symplectiques, ont développé le produit $(aM + bN)^\top J_n(aM + bN)$, concluant très vite qu'il était différent de $J_n$, sans condition sur $a, b$, simplement parce que la forme trouvée *semblait* différente de $J_n$. Une telle réponse n'est pas exacte : en particularisant les valeurs de $a, b$ (en particulier si $a = 0$ et $b = 1$), on trouve bien $J_n$. Le jury recommande aux candidats la plus grande rigueur dans ce genre de raisonnement, en particularisant des valeurs de $a, b$, voire de $M, N$, pour aboutir à la conclusion voulue.

- **Le jury recommande aux candidats de rédiger avec honnêteté et humilité** et notamment de bannir de leur vocabulaire des mots comme « clairement », « trivialement », « évidemment ». Ceux-ci n'apportent rien au contenu mathématique de la copie et ne peuvent jouer qu'en défaveur du candidat, surtout lorsqu'ils sont suivis d'erreurs manifestes ou lorsqu'ils servent à passer rapidement sur des points essentiels à la résolution de la question. Écrire, par exemple, à la question Q1, que « $J_n$ est trivialement antisymétrique », ou, à la Q13, que « les colonnes de $P$ sont trivialement orthogonales » montre surtout que le candidat a décidé de prendre de haut un aspect de la question. À nouveau, cela n'apporte rien et l'impression laissée au lecteur n'est alors pas favorable.

Le jury rappelle également que les **fautes de français**, malheureusement nombreuses dans cette épreuve, même si elles ne sont pas comptabilisées dans le barème, nuisent à la copie et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale. On rappelle ainsi que le nom « théorème » est masculin, ce qui rend incorrecte l'écriture « théorème *spectrale* », pourtant vue dans plus de deux tiers des copies.

Voici maintenant les remarques du jury, question par question.

- **Q1** : question plutôt bien réussie dans l'ensemble. Pour l'aspect antisymétrique, il était attendu au moins une justification sur la structure de la matrice, ou sur le fait que $J_n^\top = -J_n$.

- **Q2** : on note de grosses difficultés sur le maniement des équivalences et beaucoup d'erreurs de raisonnement du type « $\det(M)^2 = 1 \implies \det(M) = 1$ ». Les candidats qui donnent des notations aux coefficients de $M$ et qui se lancent dans le calcul de $M^\top J_1 M$ parviennent en général à répondre correctement.

  Rappelons, car il est visiblement besoin de le faire au vu du nombre inquiétant de copies contenant l'erreur, que $\det(M^\top J_n M) = \det(J_n)$ n'implique pas que $M^\top J_n M = J_n$.

- **Q3** : ici encore, on note d'importantes difficultés dans le maniement des équivalences. Le sens « $M$ symplectique implique $M_2 = -J_1 M_1$ » est celui qui a posé le plus de problèmes, le sens réciproque ayant trouvé plus de succès. La quasi-totalité des réponses satisfaisantes à la question sont obtenues en écrivant que, pour $M$ orthogonale, $M$ symplectique équivaut à $MJ_1 = J_1 M$.

- **Q4** : beaucoup de candidats pensent qu'il suffit que les colonnes d'une matrice de taille $2 \times 2$ soient orthogonales pour que la matrice le soit. Or, il s'agit aussi de vérifier que les colonnes sont de norme égale à 1. On regrette également qu'un grand nombre de copies ait fait figurer l'utilisation du résultat de Q3 avant même la vérification du caractère orthogonal de la matrice étudiée (cela a été systématiquement pénalisé). Il parait pourtant fondamental de s'assurer que toutes les hypothèses d'un énoncé sont vérifiées avant d'en invoquer la conclusion.

- **Q5** : le théorème spectral n'est pas systématiquement cité avec tous ses aspects ; certains se contentent de dire qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable (alors que l'existence d'une base orthonormée de diagonalisation fait partie des attentes de la question). De manière plus regrettable, on en lit parfois des versions erronées : ce n'est pas parce qu'*on peut* trouver une base orthonormée permettant de diagonaliser une matrice symétrique que *toute* matrice de passage diagonalisante est une matrice orthogonale (confusion fréquente).

  Dans la même veine, la dernière partie de la question, difficile, a été globalement mal comprise : il s'agit de montrer qu'*on peut trouver* une matrice de passage diagonalisante symplectique, et non que *toute* matrice de passage orthogonale diagonalisante est nécessairement symplectique. On aura tout de même trouvé quelques (rares) propositions satisfaisantes sur cet aspect de la question, notamment en jouant sur l'orientation d'une base orthonormée de diagonalisation.

  À noter qu'une proportion inquiétante de candidats confond « inverse » et « opposé ».

- **Q6** : trop de candidats ignorent que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nécessairement nuls. Par ailleurs, la phase de synthèse dans la détermination de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \cap S_{p_2}(\mathbb{R})$ est souvent omise. Les candidats se contentent de montrer que toute matrice antisymétrique et symplectique de taille $2 \times 2$ est nécessairement $J_1$ ou $-J_1$, sans se préoccuper de la réciproque (pourtant demandée par la question).

- **Q7** : question très accessible, globalement bien traitée. Les quelques erreurs relevées viennent d'une méconnaissance profonde de la notion d'application linéaire : il ne suffit pas de démontrer que $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ pour en déduire que $u$ est linéaire. Rappelons par ailleurs qu'il est inutile de montrer que $\varphi(X, 0) = 0$ et $\varphi(0, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ pour parvenir à ses fins.

- **Q8** : une grande proportion de candidats oublie que $\varphi(X, X)$ est un réel, rendant stérile leur calcul, pourtant correct, de $\varphi(X, X)^\top$. Ceux qui, à l'inverse, l'ont bien noté, parviennent généralement à conclure correctement.

- **Q9** : question globalement bien traitée. On a noté quelques fourvoiements dans le calcul de $X^\top J_n$, mais plutôt en faible proportion parmi les candidats.

- **Q10** : peu de candidats ont vu l'intérêt de suivre l'indication donnée, pensant élaborer un raisonnement générique pour $i, j \in [\![1, 2n]\!]$. Or, dans la grande majorité de ces cas, le raisonnement proposé ne fonctionnait en réalité que pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, sans que le candidat ne s'en aperçoive. L'incorrection du raisonnement étant subtile, le jury a tout de même tenu à valoriser (partiellement) les réponses proposées dans ce style.

- **Q11** : beaucoup ont malheureusement confondu $\varphi(J_n X, X)$ et $\langle J_n X, X\rangle$. Parmi ceux qui n'ont pas commis cette erreur, on note une grande majorité de réponses satisfaisantes.

- **Q12** : question traitée avec une fortune variable d'une copie à l'autre, principalement à cause de la mauvaise gestion de l'égalité ensembliste. Une seule inclusion ne peut suffire. Quant à l'utilisation d'une éventuelle égalité de dimensions, elle n'est pas pertinente dans cette question.

- **Q13** : les candidats se sont surtout intéressés au caractère orthonormé de la famille des colonnes de $P$ (deux premières conclusions demandées). Le jury a vu très peu de propositions satisfaisantes pour la troisième conclusion attendue (question difficile).

- **Q14** et **Q15** : rarement traitées.

- **Q16** : comme souligné précédemment, face à l'égalité $\det(M^\top)\det(J_n)\det(M) = \det(J_n)$, une proportion importante de candidats simplifie par $\det(J_n)$ sans se préoccuper de la non-nullité de cette quantité. Pour ceux qui s'y intéressent, on note beaucoup d'affirmations non justifiées quant à la valeur de $\det(J_n)$ ou l'inversibilité de cette matrice. Ce point n'a pourtant pas été étudié plus tôt dans le sujet.

Le jury a aussi noté de nombreux calculs farfelus de $\det(J_n)$. Entre autres : calcul « par blocs » — qui ne se pratique pas, en général — inversions erronées de lignes ou de colonnes, voire développements hasardeux par rapport à une ligne ou une colonne. Ainsi cette question a suscité assez peu de bonnes réponses prenant en compte à la fois la non-nullité de $\det(J_n)$ et un argument valable pour justifier celle-ci.

- **Q17** : question souvent traitée, plutôt avec succès. Le jury note toutefois beaucoup de copies prétendant (à tort, bien sûr) que « $(M^\top J_n M)^{-1} = (M^\top)^{-1} J_n^{-1} M^{-1}$ ».
- **Q18** : pour la partie concernant la structure de sous-espace vectoriel, beaucoup pensent, à raison, à invoquer l'absence de la matrice nulle. Une proportion non négligeable de réponses, insatisfaisantes, proposent des contre-exemples de combinaisons linéaires non symplectiques insuffisamment précis.
- **Q19** : le calcul de $M^\top J_n M X$, où $X$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$, est une bonne idée qui a été trouvée en proportion importante dans les copies. Toutefois, très peu pensent à vérifier la non-nullité de $\lambda$ au moment d'écrire que $MJ_nX = \dfrac{1}{\lambda} J_n X$, et encore moins à vérifier (en le justifiant correctement) que $J_n X \neq 0$ au moment de conclure qu'il s'agit d'un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$. Pourtant, un vecteur propre doit être non nul pour être considéré comme tel.
- **Q20** : question plutôt difficile, qui a été très peu réussie. Une erreur, vraiment regrettable, est malheureusement répandue : « puisque $J_n(a_1X_1+\dots+a_pX_p) = 0$, alors $a_1X_1+\dots+a_pX_p = 0$ *car* $J_n$ *est non nulle* » là où on attendait évidemment un argument d'inversibilité. Beaucoup prétendent, sur une bonne intuition, que « $J_n$ est bijective de $E_\lambda$ sur $E_{1/\lambda}$ », ce qui n'a pas vraiment de sens et qui aurait gagné à être remplacé par « l'application $X \mapsto J_n X$ induit une bijection de $E_\lambda$ sur $E_{1/\lambda}$ ». Ce genre d'affirmation appelle par ailleurs une justification qui n'a pas toujours été apportée.

  Le jury a également noté beaucoup de raisonnements formulés ainsi, « $J_n$ est inversible donc *envoie une base sur une base* », sans aucune précision des espaces concernés, alors que là est toute la substance de la question.
- **Q21** : il semble que beaucoup de candidats n'ont pas remarqué le « $Y$ » figurant au milieu de l'écriture « $(\mathrm{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, Y, J_nY_1, ))^\perp$ » et n'ont traité que la question de l'orthogonalité aux $Y_i$ et aux $J_nY_i$. Beaucoup de tentatives plutôt heureuses sur cette question.
- **Q22** : question difficile, très peu réussie et peu comprise. L'erreur selon laquelle en concaténant deux familles libres de $E_1$ on obtient une base de $E_1$ apparait de manière répétée.
- **Q24** : question difficile, peu comprise, et réussie uniquement par les tout meilleurs candidats.
- **Q25** et **Q26** ces questions peuvent être traitées à l'aide de la calculatrice (cf. remarque générale, plus haut). Beaucoup de tentatives pour la Q25, avec parfois des propositions surprenantes pour le résultat de la multiplication $8\times 8$, plus rares pour la Q26 (pour quelques bonnes réponses, parmi les meilleures copies).
- **Q27** : question beaucoup tentée, peu réussie. Les bonnes propositions s'appuyent sur un raisonnement par l'absurde construit sur le calcul de $\langle X, MX\rangle$ ou de $\bar{X}^\top MX$.
- **Q28** : la référence au résultat de la partie précédente est apparue à presque tous, mais peu ont pensé à vérifier la totalité des conditions de son application. Comme en Q4, il ne faut pas négliger la moitié des hypothèses lorsqu'on invoque un résultat précédemment établi dans le sujet.

- **Q29** : question très peu traitée intégralement, la plupart des candidats se contentant d'étudier $MX$. Même parmi les réponses se rapprochant d'une réponse correcte, le jury n'a vu qu'extrêmement rarement une vérification de la non-nullité des vecteurs proposés et pourtant, à nouveau, un vecteur propre se doit d'être non nul.

- **Q30** : pour un bon nombre de tentatives, peu de candidats se sont consacrés sérieusement à l'appartenance de $MJ_nX$ à $F$.

- **Q31** à **Q34** : questions très peu traitées. La Q34 était difficile, mais le jury a tout de même trouvé quelques réponses correctes (moins de 10).

- **Q35** et **Q36** : ici encore, la calculatrice est utilisable. Les commentaires sont les mêmes que pour les questions Q25 et Q26.

## Conclusion

Il est absolument primordial de veiller à la rigueur du raisonnement, en particulier sur ce qui semble être considéré par de nombreux candidats, à tort, comme des détails : déclaration des variables, utilisation pertinente des liens logiques (implications, équivalences) et des mots de liaison, justification de la non-nullité d'une quantité avant simplification. Il importe également que le candidat vérifie la totalité des hypothèses nécessaires avant utilisation d'un résultat précédemment établi, cela est très loin d'être systématique parmi les copies. Le correcteur, contrairement à l'examinateur à l'oral), ne peut interroger le candidat afin de lui demander d'étayer ses affirmations ou de les compléter ; il faut donc que tout soit exprimé sur la copie. Ce manque de rigueur explique que de nombreux candidats risquent de se retrouver déçus par leur note, ayant eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses auront été incomplètes ou insuffisamment précises.

Le jury tient également à rappeler la plus-value importante qu'apportent une rédaction soignée et une copie bien présentée. Et ce, à double titre :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait manquer des points importants de la question ou certaines étapes cruciales d'un raisonnement ;

- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative. Pour éviter tout désagrément, le jury recommande aux candidats de soigner leur écriture, de limiter les ratures, d'éviter de multiplier les inserts plus ou moins lisibles ou les renvois vers une autre page et d'écrire dans un francais correct.

Même si le jury n'a retenu aucun item de barème portant explicitement sur ces derniers points de forme, l'impression globale s'en ressent et ce facteur finit par avoir une influence, consciente ou non, sur la note attribuée.

Enfin, comme souvent, il n'est pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon total : il suffit de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur et de précision. Les bonnes et très bonnes copies auront, presque sans exception, été de cette espèce.

# Mathématiques 2

**PC**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

2020

## *Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, où $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\Omega$ et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Toutes les variables aléatoires sont discrètes, à valeurs réelles ou complexes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Si la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est d'espérance finie, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance.
Pour tout nombre complexe $z$, on note $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire et $\bar{z}$ son conjugué.

On appelle *sinus cardinal* la fonction définie, pour tout réel $x$, par $\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On admet que cette fonction est continue et que pour tout réel $x$, $|\mathrm{sinc}(x)| \leqslant 1$.

On étend aux variables aléatoires discrètes à valeurs complexes la notion d'espérance définie pour les variables aléatoires discrètes réelles. Ainsi, on dit qu'une variable aléatoire discrète à valeurs complexes $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ est *d'espérance finie* si les variables aléatoires réelles $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ sont d'espérance finie et on définit alors l'espérance de $Z$ par

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathrm{Re}(Z)) + \mathrm{i}\,\mathbb{E}(\mathrm{Im}(Z)).$$

On admettra les résultats suivants qui étendent aux variables aléatoires complexes les résultats analogues sur les variables aléatoires réelles.

— Toute variable aléatoire $Z$ complexe finie est d'espérance finie. Si $Z(\Omega) = \{z_1, \dots, z_r\}$, où les $z_i$ sont deux à deux distincts, alors

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{r} z_k \mathbb{P}(Z = z_k).$$

— *Théorème du transfert* (cas $X(\Omega)$ fini). Soit $X$ une variable aléatoire réelle d'image finie $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$ où les $x_i$ sont deux à deux distincts et soit $f$ une application à valeurs complexes définie sur $X(\Omega)$.
Alors $f(X)$ est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_k) f(x_k).$$

— Soit $Z$ une variable aléatoire complexe telle que $Z(\Omega)$ soit dénombrable égal à $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les $z_n$ sont deux à deux distincts. Alors $Z$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} z_n \mathbb{P}(Z = z_n)$ converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n \mathbb{P}(Z = z_n).$$

— *Théorème du transfert* (cas $X(\Omega)$ dénombrable). Soit $X$ une variable aléatoire réelle d'image dénombrable $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les $x_n$ sont deux à deux distincts et soit $f$ une application à valeurs complexes définie sur $X(\Omega)$.
Alors $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = x_n) f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) f(x_n).$$

— Soit $Z$ une variable aléatoire complexe et $\bar{Z} : \omega \in \Omega \mapsto \overline{Z(\omega)}$ sa variable aléatoire conjuguée.
Si $Z$ est d'espérance finie, alors $\bar{Z}$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(\bar{Z}) = \overline{\mathbb{E}(Z)}$.

— Soit $Z_1$ et $Z_2$ deux variables aléatoires complexes d'espérance finie et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
Alors $Z_1 + Z_2$ et $\lambda Z_1$ sont d'espérance finie et $\mathbb{E}(Z_1 + Z_2) = \mathbb{E}(Z_1) + \mathbb{E}(Z_2)$ et $\mathbb{E}(\lambda Z_1) = \lambda \mathbb{E}(Z_1)$.

# I Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

À toute variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on associe une fonction $\phi_X$, appelée *fonction caractéristique* de $X$ et définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tX}\right).$$

### I.A – *Premières propriétés*

Dans cette sous-partie, $X$ est une variable aléatoire réelle discrète.

**Q 1.** On suppose, dans cette question, que $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$.

On note $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_r\}$ où les $x_i$ sont deux à deux distincts, et, pour tout entier $k \in [\![1, r]\!]$, $a_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.

Montrer que, pour tout réel $t$, $\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{r} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tx_k}$.

**Q 2.** On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les $x_n$ sont deux à deux distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.

Montrer que $\phi_X$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel $t$, $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tx_n}$.

**Q 3.** Montrer que $\phi_X$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**Q 4.** Soit $a$ et $b$ deux réels et $Y = aX + b$. Pour tout réel $t$, exprimer $\phi_Y(t)$ en fonction de $\phi_X$, $t$, $a$ et $b$.

**Q 5.** Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $\phi_X(-t)$ en fonction de $\phi_X(t)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur l'image $\phi_X(\mathbb{R})$ pour que la fonction $\phi_X$ soit paire.

### I.B – *Trois exemples*

**Q 6.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in ]0, 1[$. On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et on note $q = 1-p$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = (q + p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t})^n$.

**Q 7.** Soit $p \in ]0, 1[$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p$ ?

**Q 8.** Soit $\lambda > 0$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ ?

### I.C – *Image de $\phi_X$*

On se donne ici une variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dont on note $\phi_X$ la fonction caractéristique. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + b\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble $\{a + bk, k \in \mathbb{Z}\}$.

**Q 9.** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(t)| \leqslant 1$.

**Q 10.** Montrer que, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que $X(\Omega) \subset a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$, alors $|\phi_X(t_0)| = 1$.

On suppose réciproquement qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\phi_X(t_0)| = 1$.

Dans la suite de cette sous-partie I.C, on suppose de plus que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

**Q 11.** Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(\mathrm{i}(t_0 x_n - t_0 a)) = 1$.

**Q 12.** En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = 0$.

**Q 13.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $a_n \neq 0$, alors $x_n \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$.

**Q 14.** En déduire que $\mathbb{P}\left(X \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$.

# II Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

L'objectif de cette partie est de montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire détermine sa loi. Deux méthodes de démonstration sont proposées.

## II.A – Première méthode

Soit $X$ une variable aléatoire réelle et discrète et $m \in \mathbb{R}$.

Pour $T \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $V_m(T) = \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} \phi_X(t)\,\mathrm{e}^{-imt}\,\mathrm{d}t$.

**II.A.1)** On suppose que $X(\Omega)$ est fini et on reprend les notations de la question 1.

**Q 15.** Montrer que, pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \displaystyle\sum_{n=1}^{r} \operatorname{sinc}(T(x_n - m))\mathbb{P}(X = x_n)$.

**Q 16.** En déduire que $V_m(T) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \mathbb{P}(X = m)$.

**II.A.2)** On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_n(h) = \operatorname{sinc}\left(\dfrac{x_n - m}{h}\right)\mathbb{P}(X = x_n)$.

**Q 17.** Montrer que pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right)$.

**Q 18.** Montrer que la fonction $g_n$ se prolonge en une fonction $\tilde{g}_n$ définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

**Q 19.** Montrer que la fonction $G = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

**Q 20.** Établir que $V_m(T) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \mathbb{P}(X = m)$.

**II.A.3) Application**

**Q 21.** Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes telles que $\phi_X = \phi_Y$. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}(Y = m)$, autrement dit que $X$ et $Y$ ont la même loi.

## II.B – Deuxième méthode

Si $a$ et $b$ sont deux réels, on note $K_{a,b}$ la fonction définie pour tout réel $t$ par $K_{a,b}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tb} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}ta}}{2\,\mathrm{i}\,t} & \text{si } t \neq 0, \\ \dfrac{b-a}{2} & \text{si } t = 0. \end{cases}$

**Q 22.** À l'aide de séries entières, montrer que $K_{a,b}$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $N$ un entier naturel et soit $F_N$ la fonction définie, pour tout réel $x$, par $F_N(x) = \displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,x}(t)\,\mathrm{d}t$.

**Q 23.** Montrer que $F_N$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel $x$, $F_N'(x) = N\operatorname{sinc}(Nx)$.

**Q 24.** Montrer que $\displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{Na}^{Nb} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s$.

**Q 25.** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s$ est convergente.

On admettra dans la suite que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sinc}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}$.

**Q 26.** En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t$ dans le cas où $a < b$.

**Q 27.** Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini. On suppose que les réels $a$ et $b$ n'appartiennent pas à $X(\Omega)$. Montrer que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \phi_X(-t)K_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[N \to +\infty]{} \mathbb{P}(a < X < b).$$



 

# III Régularité de $\phi_X$

On fixe dans cette partie une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dont l'image $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

On cherche à établir des liens entre des propriétés de la loi de $X$ et la régularité de $\phi_X$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que $X$ admet un moment d'ordre $k$ si la variable aléatoire $X^k$ est d'espérance finie.

***III.A*** –

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette sous-partie III.A que $X$ admet un moment d'ordre $k$.

**Q 28.** Soit $j$ un entier tel que $1 \leqslant j \leqslant k$. Montrer que pour tout réel $x$, $|x|^j \leqslant 1 + |x|^k$ et en déduire que $X$ admet un moment d'ordre $j$.

**Q 29.** En déduire que $\phi_X$ est de classe $C^k$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de la dérivée $k$−ième de $\phi_X$.

**Q 30.** En déduire une expression de $\mathbb{E}(X^k)$ en fonction de $\phi_X^{(k)}(0)$.

***III.B*** –

On suppose dans cette sous-partie III.B que $\phi_X$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$.

**Q 31.** On note $f$ la fonction qui à tout réel $h > 0$ associe $f(h) = \dfrac{2\phi_X(0) - \phi_X(2h) - \phi_X(-2h)}{4h^2}$. Quelle est la limite de $f$ en 0 ?

**Q 32.** Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $f(h) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$.

**Q 33.** En déduire que $X$ admet un moment d'ordre 2.

***III.C*** –

On fixe dans cette sous-partie III.C un entier naturel $k \in \mathbb{N}$ et on suppose à la fois que $\phi_X$ est de classe $C^{2k+2}$ sur $\mathbb{R}$ et que $X$ admet un moment d'ordre $2k$. On note $\alpha = \mathbb{E}(X^{2k})$.

**Q 34.** Que peut-on dire de $X$ si $\alpha$ est nul ?

On suppose dorénavant que le réel $\alpha$ est strictement positif.

**Q 35.** Soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire vérifiant $Y(\Omega) = X(\Omega)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = x_n) = \frac{a_n x_n^{2k}}{\alpha}.$$

Montrer que $\phi_Y$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$.

**Q 36.** En déduire que $X$ admet un moment d'ordre $2k + 2$.

**Q 37.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que si $\phi_X$ est de classe $C^{2k}$ sur $\mathbb{R}$, alors $X$ admet un moment d'ordre $2k$.

# IV Développement en série entière de $\phi_X$

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

***IV.A*** –

On suppose que $X(\Omega)$ est fini et on reprend les notations de la question 1.

**Q 38.** Montrer que $\phi_X$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $t$, $\phi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}\,t)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n)$.

***IV.B*** –

On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

On suppose également que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $X$ admet un moment d'ordre $n$ et qu'il existe un réel $R > 0$ tel que

$$\mathbb{E}(|X|^n) = O\left(\frac{n^n}{R^n}\right) \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

**Q 39.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}y)^k}{k!} \right| \leqslant \dfrac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}$.

**Q 40.** En déduire que pour tout réel $t \in \left[-\dfrac{R}{\mathrm{e}}, \dfrac{R}{\mathrm{e}}\right]$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}\, \mathbb{E}(X^k).$$

• • • FIN • • •

# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le sujet de cette année introduit à la transformation de Fourier des variables aléatoires réelles. On associe à la variable aléatoire $X$ une fonction d'une variable réelle $t \mapsto \phi_X(t)$ appelée *fonction caractéristique*. Dans le cas de variables aléatoires à densité, on obtient effectivement la transformée de Fourier (inverse) de la densité, mais le cas étudié par le problème est celui des variables aléatoires discrètes. Des parties importantes du programme d'analyse sont ainsi abordées : intégrales dépendant d'un paramètre, formule de Taylor, séries entières, variables aléatoires discrètes.

## Analyse globale des résultats

L'énoncé assez élémentaire laissait peu de place à l'initiative et certains candidats ont bien fait l'effort de justifier les propriétés utilisées. De trop nombreuses copies, en revanche, ne découpent pas suffisamment les raisonnements, donnant trop d'arguments tout en omettant parfois les arguments cruciaux. De telles productions, laissant au correcteur le soin de sélectionner les arguments réellement utiles, ont été logiquement sanctionnées. Rappelons la simple nécessité de justifier chaque étape d'une démonstration par un bref appel aux résultats du cours ou du problème en donnant le numéro de la question invoquée.

Si l'utilisation de la convergence normale et les méthodes d'interversion somme/intégrale sont plutôt bien assimilées, ce sont paradoxalement des outils bien plus basiques et même les techniques du secondaire qui sont parfois assez mal maitrisés. Les nombres complexes sont une grande source d'erreurs. Les techniques pour calculer les limites ou justifier l'existence d'une intégrale, de même que la manipulation des séries entières, ne sont comprises que dans les meilleures copies.

Du point de vue strictement matériel on ne peut que réitérer le conseil d'utiliser une présentation claire avec des encadrés bien choisis, sans parler du choix d'une encre stable et assez foncée en vue de la numérisation.

Les remarques qui précèdent et celles qui vont suivre ont pour but d'aider les candidats à améliorer substantiellement leur prestation.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### I Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

#### I.A – Premières propriétés

**Q1**. On note parfois une certaine incompréhension du théorème de transfert. Remarquons, ici, que $P(X = x)$ et $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx})$ ne sont pas nécessairement égales.

**Q2**. Trop de candidats font des encadrements entre des nombres complexes non réels.

**Q3**. La convergence normale est souvent mentionnée mais sans justification probante (majoration de la valeur absolue de la somme totale par exemple), de même pour la convergence uniforme qu'il ne suffit pas de mentionner sans justification pour qu'elle soit effective.

**Q4**. Des candidats écrivent $\mathrm{e}^{itaX} = (\mathrm{e}^{itX})^a$, ce qui n'a pas de sens puisque $\mathrm{e}^{itX}$ est un complexe. On voit également $E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}taX}) = \big(E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})\big)^a$.

Notons aussi que l'énoncé souhaitait une expression de $\phi_Y(t)$ en fonction de $\phi_X$, $t$, $a$ et $b$, ce qui n'est pas la même chose qu'en fonction de $\phi_X(t)$, $a$ et $b$.

**Q5**. Une question abordée avec réticence et un fort taux d'échec. Les nombres complexes dans ce contexte sont mal manipulés. On a vu souvent l'erreur $\phi_X(-t) = \phi_X(t)^{-1}$ avec la conséquence que $\phi_X$ ne peut être paire que si elle est à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

### I.B – Trois exemples

**Q7**. Une certaine méconnaissance de la loi géométrique est à déplorer. Beaucoup considèrent la loi géométrique comme finie entre 1 et un mystérieux nombre $n$, d'autres attribuent une probabilité $p$ à $X = 0$. Pour sommer une série géométrique, peu de candidats pensent à justifier que le module de la raison est strictement inférieur à 1.

### I.C – Image de $\phi_X$

**Q10**. Certains candidats éprouvent des difficultés à repérer et à expliquer avec suffisamment de détails le raisonnement. Quelques candidats ne maitrisent pas le lien entre un nombre complexe de module 1 et les nombres complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

**Q11**. De nombreux candidats semblent désemparés avec une question du type « montrer qu'il existe un réel $a$ tel que... ». Par exemple, certains partent du résultat et concluent que, puisque les modules de $\phi_X(t_0)$ et de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0 a}$ valent 1, ils obtiennent bien le résultat. D'autres prennent un $a$ qui dépend de $n$.

**Q13**. Pour quelques candidats, une somme nulle ne doit comporter que des termes nuls sans se soucier d'une hypothèse sur la positivité de ceux-ci. D'autres candidats raisonnent sur la somme obtenue à la question précédente comme sur une série entière.

Beaucoup transforment « pour tout $n$ si $a_n \neq 0$ alors » en « si pour tout $n$ $a_n \neq 0$ alors ».

**Q14**. La difficulté de nombre de candidats à simplement synthétiser ce qui a été fait auparavant est vraiment regrettable.

## II Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire réelle

### II.A – Première méthode

**Q15**. Certains candidats ne font pas la différence entre somme finie et série et veulent appliquer un théorème d'interversion série-intégrale quand la simple linéarité de l'intégrale suffit. La majorité a oublié le cas $x_n = m$. Si certains séparent bien deux cas : « si $x_n - m \neq 0$ » et « si $x_n - m = 0$ », il arrive toutefois que ce dernier cas signifie pour eux que « pour tout $n$, $x_n - m = 0$ ».

**Q16**. Des difficultés à justifier correctement que $\operatorname{sinc}(T(x_n - m))$ tend vers 0 en l'infini. Rappelons que pour prouver que $(u_n)_n$ tend vers 0 on peut simplement et sans danger majorer $|u_n|$ par un terme (positif) convergeant vers 0. Les cas $m \in X(\Omega)$ et $m \notin X(\Omega)$ n'ont pas assez été distingués. Dès lors beaucoup de confusion lorsque dans la question précédente les candidats oublient le cas $x_n = m$.

**Q17**. Dans cette partie du problème, de trop nombreux candidats se sont contentés d'affirmer que les raisonnements étaient strictement analogues à des questions déjà faites, en l'occurrence les questions Q15 et Q16, mais aussi Q2 et Q3. Un peu de bon sens devrait suggérer que telle n'est pas la réponse attendue.

**Q20**. Question rarement bien traitée, trop peu de candidats ont écrit explicitement le lien entre $V_m(T)$ et $G(1/T)$.

### II.B – Deuxième méthode

**Q22**. Bien qu'abordée dans deux tiers des copies, c'est probablement la question la moins bien traitée. Rares sont les candidats capables de faire apparaitre un développement en série entière et encore plus rares ceux qui justifient ou même remarquent que le rayon de convergence est infini ou au moins non nul. Dans l'essentiel des copies apparait la série exponentielle sans simplification et une valeur de limite non justifié pour dire qu'elle est continue et même $C^\infty$.

Des rédactions du type « pour $t = 0$, $K_{a,b}(t) = \frac{1}{2}(b - a)$ est une constante et est donc de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ » sans faire le lien avec ce qui se passe quand $t \neq 0$ mettent en évidence une grande confusion pour les notions de régularité des fonctions.

**Q23**. Assez bien traitée dans l'ensemble, la calculatrice autorisée pour l'épreuve pouvant aider à se souvenir des hypothèses.

Les candidats ont cependant du mal avec l'expression de $\partial_x K$ et la domination (on voit parfois une majoration par une exponentielle complexe), mais dans l'ensemble les hypothèses sont assez correctement mises en avant.

**Q24**. Oubli fréquent de l'hypothèse $C^1$ sur $F_N$ pour pouvoir dire que $\int_a^b F_N' = F_N(b) - F_N(a)$. Une erreur fréquente fait apparaitre $\int_{-N}^{N} \frac{1}{t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \,\mathrm{d}t$

**Q25**. Un taux d'échec surprenant pour un exercice aussi classique. La rédaction est souvent confuse et inexacte, par exemple : $(\sin x)/x$ tend vers 0 ou bien $(\cos x)/x^2 < 1/x^2$, donc l'intégrale converge. Il convient de rappeler que les théorèmes de comparaisons s'appliquent sur les intégrales de fonctions positives et de passer par la convergence absolue de $(\cos x)/x^2$.

**Q26**. Rarement entièrement traitée, mais parfois bien faite.

**Q27**. Même constat.

### III Régularité de $\phi_X$

Une partie plus rarement traitée et parfois juste survolée.

**Q28**. Dans cette question, comme pour d'autres, beaucoup de candidats sont allés trop vite. Certains se sont précipités dans une étude de fonction — ce qui pouvait certes fonctionner, fait soigneusement — mais beaucoup ont cru que nécessairement la fonction qu'ils étudieraient serait croissante, ce qui pour $x \mapsto x^j - x^k$ n'était pas le cas...

**Q29**, **Q30**. La terminologie peut-être abusive « $X$ d'espérance finie » pour dire que $X$ est intégrable produit une certaine confusion chez les candidats les moins assurés. On ne sait plus très bien si on doit prouver l'existence pour $X$ d'un moment d'ordre $j$, ou que $E(|X|^j)$ est fini ou même « $E(X^j)$ est fini ».

**Q31**. Assez décevant pour une question très classique de première année de CPGE, peu faite et souvent sans rigueur.

**Q33**. Presque aucune solution correcte. Une preuve rapide consisterait à majorer les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2$ par le sup de $f$ au voisinage de 0 (fini par continuité grâce à Q 31), en effet $\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2 = \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{N} a_n \sin^2(h x_n)/h^2$ avec $\sum_{n=0}^{N} a_n \sin^2(h x_n)/h^2 \leqslant f(h)$ par Q 32.

**Q35**, **Q36**. L'enchainement des questions et le lien avec Q29 et Q33 sont en général mal perçus.

**Q37**. Une récurrence vraiment facile dont l'hérédité n'a pourtant pas été du tout bien rédigée : le caractère $C^{2k+2}$ de $\phi_X$ (seule hypothèse dans l'hérédité) donnant l'existence d'un moment d'ordre $2k$ pour $X$ n'a quasiment été jamais expliqué : les candidats ont, eux, supposé à la fois que $\phi_X$ est de classe $C^{2k+2}$ et que $X$ admet un moment d'ordre $2k$... C'était utile pour les questions 35 et 36, mais pas pour 37.

### IV Développement en série entière de $\phi_X$

Peu abordée sereinement, à part la question 38, et seule la question 39 a été plutôt bien réussie par les meilleurs.

**Q38**. Trop peu de candidats justifient correctement le fait que $\phi_X$ soit développable en série entière. La plupart des candidats se contentent d'écrire des égalités, certains permutant une somme infinie avec une espérance ou avec une autre somme infinie (pour ceux qui ne se placent pas dans le cas où $X(\Omega)$ est fini contrairement à ce qui est précisé dans l'énoncé) sans se préoccuper de la légitimité de cette opération.

**Q39**. La formule de Taylor avec reste intégral n'est maitrisée que par peu de candidats ; ceux qui l'énoncent sans erreur vont hélas trop vite dans leurs majorations d'intégrales, défaut présent ailleurs dans les copies. L'inégalité de Taylor-Lagrange n'est pas au programme, on ne peut donc pas l'utiliser.

## Conclusion

Les correcteurs relèvent cette année une hétérogénéité frappante. Quelques copies sont bien rédigées, de façon claire, structurée, concise. Mais la présence de quelques bonnes copies donnant un traitement correct de l'ensemble du problème ne doit pas surprendre, s'agissant d'un énoncé très abordable. Par contre, la plupart des copies sont assez mal rédigées, à la fois quant à la propreté (en termes de ratures, etc.) et à la rédaction proprement dite (peu de phrases, beaucoup de symboles $\forall$ ou $\implies$ mal à propos). Sur le fond, il est assez alarmant qu'une moitié des candidats ne peut finalement obtenir qu'un quart des points du barème. Peut-être faut-il y voir une conséquence des perturbations de l'enseignement subies cette année. Cette impression est renforcée par la relative abondance parmi les notes moyennes de copies dont le niveau est assez bon mais qui ne traitent qu'une partie du problème, comme si les candidats avaient mal géré leur temps faute d'entrainement adéquat.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

**PC**

4 heures — Calculatrice autorisée

**2019**

## *Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$*

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de $E$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à $n$ lignes et $n$ colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ de $E$, de l'endomorphisme $u$ de $\mathcal{L}(E)$.

La matrice transposée de toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée $M^\top$.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire tel que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments $u$ et $v$ de $\mathcal{A}$. (Remarquer qu'on ne demande pas que $\mathrm{Id}_E$ appartienne à $\mathcal{A}$.)

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est *commutative* si pour tous $u$ et $v$ dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout $u$ de $\mathcal{A}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{A}$, $AB = BA$. Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice $M$ de $\mathcal{A}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si $\mathcal{B}$ est une base de $E$, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(E)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est *strict* si $F$ est différent de $E$.

On désigne par $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures. (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

## I Exemples de sous-algèbres

### *I.A – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

**Q 1.** Les sous-ensembles $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ?

**Q 2.** Les sous-ensembles $\mathrm{S}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ?

**Q 3.** On suppose $n \geqslant 3$. Les sous-ensembles $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ?

### *I.B – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$*

Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$ et $\mathcal{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ qui stabilisent $F$, c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$.

**Q 4.** Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

**Q 5.** Montrer que $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2$.

On pourra considérer une base de $E$ dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{A}_F$ est triangulaire par blocs.

**Q 6.** Déterminer $\max\limits_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

***I.C – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables***

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

**Q 7.** Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

**Q 8.** Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Q 9.** Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

# II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$.

Pour tout $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(a_0, ..., a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coefficient d'indice $(i,j)$ de $J(a_0, ..., a_{n-1})$ est $a_{i-j}$ si $i \geqslant j$ et $a_{i-j+n}$ si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0, ..., a_{n-1})$ où $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, ..., n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

***II.A – Calcul des puissances de $J$***

**Q 10.** Préciser les matrices $J$ et $J^2$. (On pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n > 2$.)

**Q 11.** Préciser les matrices $J^n$ et $J^k$ pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

**Q 12.** Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, ..., a_{n-1})$ et les $J^k$, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$ ?

***II.B – Une base de $\mathcal{A}$***

**Q 13.** Montrer que $(I_n, J, J^2, ..., J^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.

**Q 14.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M$ commute avec $J$ si et seulement si $M$ commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.

**Q 15.** Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

***II.C – Diagonalisation de $J$***

**Q 16.** Déterminer le polynôme caractéristique de $J$.

**Q 17.** Montrer que $J$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**Q 18.** La matrice $J$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?

**Q 19.** Déterminer les valeurs propres complexes de $J$ et les espaces propres associés.

***II.D – Diagonalisation de $\mathcal{A}$***

**Q 20.** Le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ?

**Q 21.** Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

**Q 22.** Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, ..., a_{n-1})$ ?

# III Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égale à $n^2 - n + 1$.

Dans toute cette partie, $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ strictement incluse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $d$ sa dimension. On a donc $d < n^2$.

### *III.A – Un produit scalaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

La trace de toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{tr}(M)$.

**Q 23.** Montrer que l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $(A, B) \mapsto \langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On désigne $\mathcal{A}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $r$ sa dimension.

**Q 24.** Quelle relation a-t-on entre $d$ et $r$ ?

Jusqu'à la fin de cette partie III, on fixe une base $(A_1, ..., A_r)$ de $\mathcal{A}^\perp$.

**Q 25.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M$ appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\langle A_i \mid M \rangle = 0$.

**Q 26.** Montrer que pour toute matrice $N \in \mathcal{A}$ et tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $N^\top A_i \in \mathcal{A}^\perp$.

### *III.B – Conclusion*

Soit $\mathcal{A}^\top = \{M^\top \mid M \in \mathcal{A}\}$.

**Q 27.** Montrer que $\mathcal{A}^\top$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que $\mathcal{A}$.

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à $n$ lignes et à coefficients réels. On rappelle qu'à toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est associé canoniquement l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X \mapsto MX$.

**Q 28.** Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $F = \mathrm{Vect}(A_1 X, ..., A_r X)$. Montrer que $F$ est stable par les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{A}^\top$.

**Q 29.** Montrer que $d \leqslant n^2 - n + 1$ et conclure.

# IV Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie V.

**Théorème de Burnside**

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de $E$ stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et $E$, alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents, alors $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

**Q 30.** Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geqslant 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leqslant n - 1$.

**Q 31.** Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $V$ de $E$ distinct de $E$ et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note $r$ sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

**Q 32.** Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$

où $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.

**Q 33.** Montrer que $\{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\{D(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

**Q 34.** Montrer que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

**Q 35.** Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle les matrices des éléments de $\mathcal{A}$ appartiennent à $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{C})$.

# V Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie IV.

On fixe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n \geqslant 2$.

On dira qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et $E$.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

## *V.A – Recherche d'un élément de rang 1*

**Q 36.** Soient $x$ et $y$ deux éléments de $E$, $x$ étant non nul. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

On pourra considérer dans $E$ le sous-espace vectoriel $\{u(x) \mid u \in \mathcal{A}\}$.

**Q 37.** Soit $v \in \mathcal{A}$ de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$0 < \operatorname{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \operatorname{rg} v.$$

Considérer $x$ et $y$ dans $E$ tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre, justifier l'existence de $u \in \mathcal{A}$ tel que $u \circ v(x) = y$ et considérer l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\operatorname{Im} v$.

**Q 38.** En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans $\mathcal{A}$.

## *V.B – Conclusion*

Soit $u_0 \in \mathcal{A}$ de rang 1. On peut donc choisir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de $E$ telle que $(\varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ soit une base de $\ker u_0$.

**Q 39.** Montrer qu'il existe $u_1, ..., u_n \in \mathcal{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

**Q 40.** Conclure.

• • • FIN • • •

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Le sujet traite de la réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$, où $E$ est un $\mathbb{R}$- ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, c'est-à-dire de la co-diagonalisation ou la co-trigonalisation des éléments d'une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ (ou de $M_n(\mathbb{K})$, en adoptant un point de vue matriciel).

La notion de sous-algèbre est définie en introduction du sujet et la partie I propose de s'approprier cette notion, au travers d'exemples choisis, en dimension 2 et en dimension $n$ : matrices symétriques, antisymétriques, triangulaires supérieures en section I-A, algèbre des endomorphismes laissant un sous-espace stable en section I-B et algèbres $\Gamma(\mathbb{R})$, $\Gamma(\mathbb{C})$ en section I-C. La partie II est consacrée à la sous-algèbre de $M_n(\mathbb{R})$ constituée des matrices circulantes, dont on démontre la co-diagonalisabilité dans $M_n(\mathbb{C})$ (alors que cette algèbre elle-même ne constitue pas une $\mathbb{C}$-algèbre).

La partie III propose de calculer la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $M_n(\mathbb{R})$, en recourant au produit scalaire canonique de $M_n(\mathbb{R})$ et à la notion d'algèbre transposée, avec un retour sur les résultats de la section I-B, à la toute dernière question de cette partie.

Enfin, les parties IV et V proposent de démontrer la co-trigonalisation des éléments d'une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'éléments nilpotents. En partie IV, on démontre ce résultat par récurrence forte sur la dimension de $E$ et en s'appuyant sur un théorème de Burnside qu'on démontre, finalement, en partie V.

## Analyse globale des résultats

Sur les 3473 copies corrigées, la moyenne constatée, en pourcentage du barème, est de 24,4 %, pour un écart-type de 14,7 %. Le sujet peut donc être considéré comme long, mais il a permis une bonne discrimination parmi les candidats. Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur le soin apporté aux réponses, bien plus que sur le volume traité. La meilleure copie a obtenu un total de 82 % des points du barème total.

Les parties I à III ont été abordées par la quasi-totalité des candidats (plus de 95 % d'entre eux), tandis que les parties IV (environ 60 %) et V (environ 25 %) l'ont moins été, principalement en raison de leur plus grande difficulté relative. Les parties I à III représentent environ 72 % des points du barème.

Comme mentionné plus haut, le soin mis à traiter les questions d'appropriation des termes du sujet a été un facteur important de sélection. Prenons pour exemple la section I-A, dont l'objectif est de s'approprier la notion de sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$, section traitée par la quasi-totalité des candidats (plus de 99,8 %). Près de 83 % d'entre eux ont obtenu moins de la moitié des points attribués, traduisant une certaine négligence à établir l'ensemble des propriétés d'une sous-algèbre et une mauvaise compréhension de la notion de contre-exemple (cf. plus loin). À l'opposé, seulement 1,7 % des candidats ont répondu parfaitement à l'ensemble des questions de cette section du sujet. On note les mêmes contrastes à la question **Q9**, quant à la notion de sous-algèbre diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$.

Le sujet comporte certains passages « classiques ». Par exemple, celui sur les matrices circulantes, en sections II-B, II-C et II-D, montre une distribution des résultats moins contrastée parmi les copies. Il en est de même pour la section III-A, relative au produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$. Certains candidats, ayant traité ces points pendant l'année, ont sans doute pu trouver davantage de repères.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

— *Toute réponse doit être justifiée*

Une réponse en une ligne donnant directement le résultat (attendu ou non), sans un minimum de contextualisation, est toujours mal perçue, souvent sanctionnée. Dans ce même ordre d'idée, il est fortement recommandé d'être attentif à la rédaction des premières questions de l'épreuve. Par exemple, en question **Q1**, il n'a malheureusement pas été rare de lire « $T_n(\mathbb{K})$ est clairement une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ » ou « par un raisonnement similaire, $T_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ ». Les notions de sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ et de matrice triangulaire supérieure stricte venant d'être (re)définies dans le sujet, il était de bon ton d'en vérifier point par point les propriétés.

— *Les variables utilisées par les candidats doivent être déclarées*

Il n'a pas été rare de voir apparaitre des $A$, $B$, $x$, $y$, $\alpha$, $\beta$ au milieu d'un raisonnement sans en avoir vu la déclaration au préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent. C'est parfois très malvenu, puisque le sujet s'autorise quelques aller-retours entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ qui peuvent créer de fortes confusions.

— *Le jury recommande aux candidats une posture d'humilité*

Notamment de bannir de leur rédaction des mots comme « clairement », « trivialement », « évidemment » et la fameuse « récurrence triviale ». Ceux-ci n'apportent rien au contenu mathématique de la copie et ne peuvent jouer qu'en défaveur du candidat, surtout lorsqu'ils sont suivis d'erreurs manifestes ou lorsqu'ils servent à passer rapidement sur des points essentiels à la résolution de la question. Écrire, par exemple, à la question **Q1**, que « $T_n^+(\mathbb{K})$ est *trivialement* un espace vectoriel » montre surtout que le candidat a décidé de prendre de haut un point constitutif de la notion de sous-algèbre, qu'on demande de s'approprier dans ce qui est la toute première question du sujet. L'impression laissée, d'emblée, n'est pas bonne.

— *En guise de contre-exemples*

Les candidats préfèrent laisser des réponses impliquant des paramètres qui, s'ils sont bien choisis, ne constituent plus un contre-exemple à l'affirmation étudiée. Cette remarque concerne les questions **Q2**, **Q3**, **Q8**, entre autres. Par exemple, à la question demandant si $S_2(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{K})$, la majorité des candidats introduisent deux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$, effectuent le produit matriciel et en déduisent : « puisque $ab' + bc' \neq ba' + cb'$, alors le produit n'est pas une matrice symétrique », ce qui est faux, si on particularise les coefficients de ces deux matrices. De la même manière, à la question **Q8**, on lit très souvent que le polynôme $(X-a)^2 + b^2$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, sans avoir choisi $b \neq 0$ au préalable. Or, le polynôme $(X-a)^2$ est bien scindé sur $\mathbb{R}$. Les exemples de ce type sont très nombreux dans les copies.

— *Des formulations à éviter*

Des formulations telles que « on est en dimension finie » ou « on travaille en dimension finie » (par exemple en question **Q24**) sont mathématiquement imprécises et malvenues, notamment à l'écrit. Dans ce cas précis, il est bien plus pertinent de préciser quel espace est de dimension finie. Dans la question **Q24**, par exemple, il s'agit d'invoquer la dimension finie de l'espace $M_n(\mathbb{R})$ pour affirmer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^\perp$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.

— *Inclusion / appartenance*

On a beaucoup lu le symbole d'inclusion à la place du symbole d'appartenance (et vice versa).

— *De nombreuses erreurs sur les quantificateurs*

Les confusions sur l'ordre des quantificateurs $(\forall, \exists)$ dans une proposition mathématique, ont malheureusement été très répandues. Citons par exemple, à la question **Q3**, ces nombreux candidats qui ont souhaité démontrer que pour tous $A, B \in S_n(\mathbb{K})$, on a $AB \notin S_n(\mathbb{K})$, alors qu'il suffit de montrer qu'il existe $A, B \in S_n(\mathbb{K})$ tels que $AB \notin S_n(\mathbb{K})$. On retrouve des problèmes tout à fait similaires aux questions **Q2**, **Q8**, **Q9** et **Q21**.

Le jury rappelle également que les *fautes de français*, même si elles ne sont pas explicitement comptabilisées dans le barème, nuisent à la copie et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale. Malheureusement, cette épreuve a été loin de faire exception dans ce domaine.

### I Exemples de sous-algèbres

**Q1**. Une sous-algèbre d'une algèbre $\mathcal{A}$ est avant tout un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$. De très nombreux candidats l'oublient et se contentent de démontrer (avec plus ou moins de réussite) la stabilité par produit, ce qui constitue une mauvaise appropriation des termes du sujet. Ici, il s'agit de faire ce double travail (structure de sous-espace vectoriel et stabilité par produit) pour $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$. Remarque analogue pour les questions **Q4**, **Q7**, **Q15** et **Q27**.

**Q2**. Voir les remarques générales, la mise en évidence d'un contre-exemple précis, reste le meilleur moyen de conclure, pour $S_2(\mathbb{K})$ comme pour $A_2(\mathbb{K})$. Par ailleurs, on a souvent lu des propositions de matrices antisymétriques avec des coefficients diagonaux non nuls.

**Q3**. De nombreux candidats proposent, pour seule réponse, un contre-exemple en taille 3 pour chacun des deux ensembles. Cela ne peut constituer une réponse suffisante. On peut, par exemple, proposer des matrices définies par blocs réutilisant les contre-exemples proposés à la question précédente.

**Q4**. Même remarque qu'en question **Q1**. Par ailleurs, beaucoup écrivent $(\lambda u + v)(F) = \lambda u(F) + v(F)$, alors qu'on a, à priori, la seule inclusion $(\lambda u + v)(F) \subset \lambda u(F) + v(F)$.

**Q5**. Nous avons trouvé très peu de réponses complètement satisfaisantes. De nombreuses fois, les candidats font référence à « la » base de $E$ adaptée à $F$ (et, parfois, à $F$ et « son » supplémentaire). On rappelle aux candidats qu'en général, il n'y a pas unicité d'une base de $E$ adaptée à un sous-espace vectoriel $F$ (et qu'il existe une multiplicité de supplémentaires à un sous-espace vectoriel donné (hors $E$ et l'espace nul)).

**Q6**. Le jury s'attendait à un bien meilleur taux de réussite sur une question d'un niveau tout à fait raisonnable (maximisation d'un trinôme du second degré sur un intervalle borné). On a noté de nombreuses erreurs sur les sens de variation, sur le calcul de la valeur du trinôme en $(n-1)$, etc.

**Q7**. Même remarque qu'en question **Q1**.

**Q8**. Voir remarques générales et question Q2 : il est beaucoup plus simple de proposer un contre-exemple précis comme la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ plutôt qu'un raisonnement général portant sur des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ (à moins qu'on pense à éliminer le cas $b = 0$ ce qui a été rarement fait.

**Q9**. On constate ici les premiers écarts de compréhension, parmi les candidats, de la notion de sous-algèbre diagonalisable. Il s'agit ici de trouver une base *commune* de diagonalisation des matrices de l'algèbre $\Gamma(\mathbb{C})$ et pas seulement de montrer que toute matrice de $\Gamma(\mathbb{C})$ est diagonalisable. On a également trop souvent lu que la somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable (ce qui est, sans autre argument, faux).

### II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

**Q10**. Un certain nombre de candidats ont confondu la matrice $J$ et la notation $J(a_0, ..., a_{n-1})$, se condamnant pour les trois questions à suivre.

**Q13**. Beaucoup de candidats sont partis de l'idée que $\dim \mathcal{A} = n$ (parfois vaguement justifiée par l'évocation, insuffisante, de « degrés de liberté »), se contentant d'établir le caractère libre, ou générateur, de la famille $(I_n, J, ..., J^{n-1})$ pour conclure. Or, ce résultat de dimension n'a, jusqu'à ce moment du sujet, jamais été établi.

**Q15**. Même remarque qu'en question **Q1**, outre le fait que dans l'expression « sous-algèbre commutative », de nombreux candidats ne voient que l'adjectif « commutative », ce qui ne compose qu'une partie de la question.

**Q16**. On note une maitrise très imparfaite du développement par rapport à une ligne ou une colonne, notamment pour ce qui est des facteurs $(-1)^{i+j}$ qui doivent apparaitre. Par ailleurs, le jury rappelle que la définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée $A$, telle que stipulée dans le programme, est $\det(XI_n - A)$ (et non $\det(A - XI_n)$). Toutefois, aucune pénalité n'a été appliquée en cas d'usage de la seconde forme.

**Q17** à **Q19**. Pour ceux (relativement nombreux) qui ont trouvé, par un raisonnement suffisamment étayé, le bon polynôme caractéristique ($X^n - 1$) en question **Q16**, on note une bonne maitrise des racines $n$-ièmes de l'unité, allant, moins rarement qu'attendu, jusqu'à la détermination correcte des espaces propres de la matrice $J$ en question **Q19**.

**Q18**. Peu de candidats ont pensé à mettre le cas $n = 2$ à part, pour lequel la matrice $J$ est bien diagonalisable. Beaucoup ont répondu, à contrario, que le polynôme $X^n - 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est vrai que pour $n \geqslant 3$ (donc faux en toute généralité).

**Q20**. Très peu de candidats ont vu la subtilité de cette question (non stabilité par multiplication par un scalaire complexe non réel). À contrario, on a malheureusement beaucoup lu que toute sous-algèbre de $M_n(\mathbb{R})$ est systématiquement une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$, « par inclusion ».

**Q21** et **Q22**. Ces questions, lorsqu'elles ont été traitées, l'ont souvent été de manière satisfaisante.

### III Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

**Q23**. Cette question (presque de cours) a été abordée par presque tous les candidats, avec un succès variable. Notons que la plupart connaissent bien les propriétés caractéristiques d'un produit scalaire. Parmi les erreurs relevées, on déplore toutefois la croyance selon laquelle $\mathrm{tr}(A^\top A) = \mathrm{tr}(A^2)$, puis que $\mathrm{tr}(A^2) \geqslant 0$, positivité sans doute acquise en raison de la présence d'un carré. Également parmi les erreurs rencontrées, on a souvent lu l'écriture, fausse en général, $\mathrm{tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2$, au lieu de la somme double attendue $\mathrm{tr}(A^\top A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$.

**Q25**. Beaucoup pensent que si une matrice $M$ n'appartient pas à $\mathcal{A}$, alors elle appartient à son supplémentaire orthogonal $\mathcal{A}^\perp$, ce qui est grossièrement faux.

**Q27**. Même remarque qu'en **Q1**. On a également noté de nombreuses confusions entre la dimension de l'algèbre $\mathcal{A}$ et la taille des matrices qu'elle contient.

**Q29**. Question difficile, pour laquelle on a eu très peu de propositions pleinement satisfaisantes. Le jury a valorisé les bonnes idées et les pistes intéressantes.

### IV Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

**Q30**. Beaucoup de raisonnements alambiqués, là où il aurait suffi de remarquer que toute matrice de taille 1 est triangulaire, diagonale, etc.

**Q31**. De nombreuses copies invoquent une *réciproque* du théorème de Burnside, là où il fallait parler de *contraposée.*

**Q32** à **Q35**. Peu de propositions, la plupart intéressantes sans être complètement satisfaisantes.

### V Le théorème de Burnside

**Q36** à **Q40**. Questions pour la plupart difficiles (voire très difficiles) et très peu traitées. La question **Q36** l'a été un peu plus que les autres, notamment par des copies plutôt faibles, les candidats pensant se trouver face à une question simple de début de partie (ce qui n'est pas le cas). Dans ces questions, le jury a veillé à valoriser les bonnes idées.

## Conclusion

À l'écrit, il est absolument primordial de veiller à avoir bien répondu à toutes les parties d'une question et à avoir bien cité toutes les hypothèses des théorèmes utilisés. Le correcteur, à l'écrit (contrairement à l'examinateur, à l'oral), ne peut interroger le candidat afin de lui demander d'étayer ses affirmations ; il faut donc que tout soit dit sur la copie. Par exemple, on pourra regretter cet oubli fréquent d'établir la structure de sous-espace vectoriel afin de conclure à la structure de sous-algèbre. C'est ainsi que beaucoup risquent de se retrouver déçus de leur note, ayant eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses sont incomplètes.

Nous tenons également à rappeler la plus-value importante qu'apportent une rédaction soignée et une copie bien présentée. Et ce, à double titre :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait manquer des points importants de la question ou certaines subtilités, c'est ainsi que beaucoup ont négligé certains aspects de la notion de sous-algèbre, de vérifier la validité des contre-exemples proposés, ou ont confondu diagonalisation et co-diagonalisation ;

- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative. Pour éviter tout désagrément, nous recommandons aux candidats de soigner leur écriture ; de limiter les ratures, d'éviter de multiplier les inserts plus ou moins lisibles et d'écrire dans un français correct.

Même si le jury n'a retenu aucun item de barème portant explicitement sur ces derniers points de forme, l'impression globale s'en ressent et ce facteur finit par avoir une influence, consciente ou non, sur la note attribuée.

Enfin, il n'était pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon total : il suffisait de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur et de précision. Les bonnes et très bonnes copies sont, presque sans exception, de cette espèce.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 2

**PC**

4 heures

Calculatrice autorisée

2019

Le sujet est composée de trois parties.

Dans la partie I, on définit une suite $(\alpha_n)_n$ d'entiers naturels via le développement en série entière d'une fonction auxiliaire et on s'intéresse en particulier à la suite extraite $(\alpha_{2n+1})_n$ formée des termes de rang impair.

Dans la partie II, on détermine un équivalent, lorsque $n$ tend vers l'infini, de $\alpha_{2n+1}$ en faisant appel à des outils analytiques et notamment à la fonction zêta de Riemann.

Dans la partie III, on définit les permutations alternantes. On procède d'abord à leur dénombrement, avant de s'intéresser à des aspects probabilistes.

La partie II fait appel, très ponctuellement, à des résultats de la partie I. La partie III utilise des résultats des parties I et II.

## I Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle $I = ]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction $f$ définie sur $I$ par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre $n$ de $f$ et, par convention, $f^{(0)} = f$.

### *I.A – Dérivées successives*

**Q 1.** Exprimer les dérivées $f'$, $f''$ et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.

**Q 2.** Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

On explicitera les polynômes $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ et, pour tout entier naturel $n$, on exprimera $P_{n+1}$ en fonction de $P_n$ et $P_n'$.

**Q 3.** Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme $P_n$ est unitaire, de degré $n$ et que ses coefficients sont des entiers naturels.

**Q 4.** Montrer

$$\forall x \in I, \qquad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

Pour tout entier naturel $n$, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

**Q 5.** Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

### *I.B – Développement en série entière*

On note $R$ le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et $g$ sa somme.

**Q 6.** À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, \pi/2[, \qquad \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x).$$

**Q 7.** En déduire la minoration $R \geqslant \pi/2$.

**Q 8.** Montrer

$$\forall x \in I, \qquad 2g'(x) = g(x)^2 + 1.$$

**Q 9.** Montrer

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = g(x).$$

Considérer les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$.

**Q 10.** En déduire que $R = \pi/2$.

### *I.C – Partie paire et partie impaire du développement en série entière*

**Q 11.** Justifier que toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.

**Q 12.** En déduire

$$\forall x \in I, \qquad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

On note $t$ la fonction définie sur $I$ par $t(x) = \tan(x)$.

**Q 13.** Pour tout entier naturel $n$, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

**Q 14.** Rappeler, sans justification, l'expression de $t'$ en fonction de $t$.

**Q 15.** En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}.$$

## II Équivalent de $\alpha_{2n+1}$

### *II.A – La fonction zêta*

Pour tout $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

**Q 16.** Montrer que $\zeta$ est continue sur $]1, +\infty[$.

**Q 17.** Encadrer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ par deux intégrales et en déduire $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.

**Q 18.** Déterminer $C(s)$ tel que

$$\forall s \in ]1, +\infty[, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = C(s)\,\zeta(s).$$

### *II.B – Une formule pour la fonction cosinus*

Pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n \,\mathrm{d}t$.

**Q 19.** Montrer

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) \qquad \text{et} \qquad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$

**Q 20.** Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

**Q 21.** En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in ]0,1[, \qquad \cos(\pi x) = \frac{1}{2} \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)} \frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)} \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right).$$

### *II.C – Un autre développement de tangente*

Dans toute cette sous-partie II.C, on pose $J = [0, 1/2[$ et, pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$ de $J$,

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \right).$$

**Q 22.** Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall s \in ]1, +\infty[, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \frac{1}{2(s-1)} \frac{1}{(2n-1)^{s-1}}.$$

**Q 23.** Justifier que, pour tout entier naturel $n$, la fonction $S_n$ est définie sur $J$.

**Q 24.** Montrer que la suite $(S_n)$ converge simplement sur $J$ vers la fonction nulle.

**Q 25.** En dérivant $x \mapsto \ln(\cos(\pi x))$, montrer

$$\forall x \in J, \qquad \pi \tan(\pi x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{8x}{(2k-1)^2} \frac{1}{1 - \dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}}.$$

**Q 26.** Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in J, \qquad \pi \tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p} - 1)\zeta(2p)\, x^{2p-1}.$$

**Q 27.** Montrer l'inégalité $t\cos(t) \leqslant \sin(t)$, pour tout $t$ de $[0, \pi/2]$.

**Q 28.** En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant -I'_n(x) \leqslant \frac{4x}{n} I_n(x)$$

puis, pour $x \in [0,1]$, la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I'_n(x)}{I_n(x)}$.

**Q 29.** En déduire l'égalité

$$\forall x \in J, \qquad \pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2\,(2^{2p} - 1)\,\zeta(2p)\, x^{2p-1}.$$

### *II.D – Un équivalent de $\alpha_{2n+1}$*

**Q 30.** Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_{2n+1} = \frac{2\,(2^{2n+2} - 1)\,(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2).$$

**Q 31.** En déduire un équivalent de $\alpha_{2n+1}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

# III Permutations alternantes

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une liste de $n$ nombres réels. On dit que la liste $(x_1, ..., x_n)$ est alternante montante si $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) > 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$. On dit qu'elle est alternante descendante si $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) < 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$.

Autrement dit, la liste $(x_1, ..., x_n)$ est alternante montante si elle vérifie les inégalités $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \cdots$. Elle est alternante descendante si elle vérifie les inégalités inverses.

Par exemple, $(1, 5, 3, 11, 8, 9)$ est alternante montante car $1 < 5 > 3 < 11 > 8 < 9$ et $(7, 4, 5, 2, 12)$ est alternante descendante car $7 > 4 < 5 > 2 < 12$.

On dit qu'une permutation $\sigma$ de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est alternante montante (respectivement alternante descendante) si la liste $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$ est alternante montante (respectivement alternante descendante).

Par exemple, avec $n = 7$ et en représentant toute permutation $\sigma$ par la liste des images $(\sigma(1), ..., \sigma(7))$, on constate que $(1, 5, 4, 6, 2, 7, 3)$ représente une permutation alternante montante et $(3, 2, 6, 4, 7, 1, 5)$ une permutation alternante descendante.

### *III.A – Dénombrement des permutations alternantes*

**Q 32.** Déterminer les permutations alternantes montantes de $[\![1, n]\!]$ pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

**Q 33.** Montrer, pour tout $n \geqslant 2$, que le nombre de permutations alternantes montantes est égal au nombre de permutations alternantes descendantes.

Si $n \geqslant 2$, on note $\beta_n$ le nombre de permutations alternantes montantes de $[\![1, n]\!]$, et on convient que $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

**Q 34.** Soient $k$ et $n$ deux entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n$ et $A$ une partie à $k$ éléments de $[\![1, n]\!]$. On considère les listes $(x_1, ..., x_k)$ constituées de $k$ éléments deux à deux distincts de $A$. Montrer que le nombre de ces listes qui sont alternantes montantes est égal à $\beta_k$.

Le nombre de celles qui sont alternantes descendantes est le même, mais on ne demande pas de le justifier.

**Q 35.** Montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, $2\beta_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k \beta_{n-k}$.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, dénombrer les permutations $\sigma$ alternantes (montantes ou descendantes) de $[\![1, n+1]\!]$ telles que $\sigma(k+1) = n+1$.

**Q 36.** En déduire que $\beta_n = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### *III.B – Permutations aléatoires*

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on munit l'ensemble $\Omega_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme. On note $p_n$ la probabilité qu'une permutation dans $\Omega_n$ soit alternante montante. On convient de plus que $p_0 = p_1 = 1$.

**Q 37.** Montrer que la suite $(p_n)$ tend vers 0. Donner un équivalent de $p_{2n+1}$ quand $n$ tend vers l'infini.

On définit une variable aléatoire $M_n$ sur $\Omega_n$ en associant à toute permutation $\sigma \in \Omega_n$ l'entier $M_n(\sigma)$ tel que :

— $M_n(\sigma) = 2$ si $\sigma(1) > \sigma(2)$ ;
— $M_n(\sigma) = 3$ si $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3)$ ;
— $M_n(\sigma) = 4$ si $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) > \sigma(4)$ ;
— ...
— $M_n(\sigma) = n + 1$ si $\sigma$ est alternante montante.

En d'autres termes, $M_n(\sigma) = k+1$, où $k$ est le plus grand entier tel que $(\sigma(1), ..., \sigma(k))$ soit alternante montante.

On note $\mathbb{E}(M_n)$ l'espérance de $M_n$.

**Q 38.** Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, montrer $\mathbb{P}(M_n > i) = p_i$.

**Q 39.** Exprimer $\mathbb{E}(M_n)$ en fonction de $p_0$, $p_1$, ..., $p_n$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_n) = \frac{\sin(1) + 1}{\cos(1)}$.

• • • FIN • • •

# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le sujet de cette année propose de démontrer des résultats classiques sur les valeurs de la fonction $\zeta$ aux entiers pairs et ses liens avec le développement en série entière de la fonction tangente. La question **Q30** donne un résultat complet sur les $\zeta(2n)$ — les $\zeta(2n+1)$ étant encore aujourd'hui le sujet de nombreuses conjectures. Enfin, une relation avec un problème de dénombrement (suites alternantes d'entiers distincts) donne l'occasion de calculer des probabilités. De nombreuses parties importantes du programme d'analyse sont ainsi abordées : intégrales dépendant d'un paramètre, formule de Taylor, séries entières, équations différentielles, intégration par parties, variables aléatoires discrètes.

Outre les connaissances testées, certaines questions demandent un minimum d'imagination tandis que d'autres exigent soin et persévérance dans les calculs.

## Analyse globale des résultats

Si on ne discerne pas de lacune particulière dans la formation des candidats, il reste que certains points apparaissent mal maitrisés dès lors qu'il faut s'écarter des applications les plus communes. Beaucoup d'erreurs semblent simplement provenir d'un défaut de pratique de certains aspects : erreurs dans la manipulation des indices ou des variables, bornes des domaines de définition ou de validité des formules, calculs algébriques sur les fonctions trigonométriques. Cela sera détaillé au niveau de chaque question dans ce qui suit.

C'est surtout dans ce qu'on appelle « la forme » que des progrès importants restent à faire. Trop de candidats répondent aux questions par une série d'égalités sans autre commentaire qu'une phrase de conclusion. Il est au contraire essentiel de justifier chaque étape d'une démonstration par un bref appel aux résultats du cours ou du problème. Dans ce dernier cas, on doit impérativement donner le numéro de la question invoquée, même si elle est très proche. Cela va bien au-delà d'une simple question de présentation et même au-delà de la seule mention des idées classiques utilisées. Ainsi qu'on peut le voir pour certaines questions du problème de cette année (cf. partie III) la verbalisation d'idées simples mais pas forcément banales est une compétence essentielle.

Sur la présentation strictement matérielle on ne peut que réitérer le conseil d'utiliser une présentation claire avec des encadrés intelligemment choisis, sans parler de l'utilisation d'une encre assez foncée.

Les remarques qui précèdent et celles qui vont suivre ont pour but d'aider les candidats moyens à améliorer substantiellement leur prestation.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### I Introduction d'une fonction auxiliaire

I.A – Dérivées successives

**Q1**. Les candidats gagneraient à simplifier progressivement leurs calculs. La suite du sujet permettait d'orienter la simplification vers une suppression des $\cos x$.

**Q2**. Confusion fréquente entre $P(\sin x)$ et $P \times \sin x$. On remarque une maladresse à passer de polynômes en $\sin x$ à des polynômes en $X$.

**Q3**. Très peu de justifications que les coefficients sont positifs ou nuls, ce qui demandait un calcul explicite des coefficients.

**Q5**. Il n'est pas vrai que toute assertion dépendant d'un entier se démontre par récurrence ! Il est important de parler ici de formule de Leibniz, sans quoi il n'est pas clair du tout pour le lecteur de deviner la méthode employée.

### I.B – Développement en série entière

**Q6**. Beaucoup d'erreurs dans la formule de Taylor avec reste intégral. Certains utilisent la positivité de $f^{(n)}$ invoquant le fait que $P_n$ est à coefficients strictement positifs, même s'ils ont négligé ce point auparavant.

**Q7**. Ici il convient de considérer $\sum_n \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ simplement comme une série et il est crucial qu'elle soit à termes positifs, sans quoi le fait que les sommes partielles sont bornées est à priori sans conséquence. On pourrait bien sûr arguer que cela implique que $(\frac{\alpha_n}{n!} x^n)_n$ est toujours bornée pour $x \in [0, \pi/2[$ et en déduire que la série entière converge sur ce même intervalle ouvert... mais on n'a pas vu cet argument.

**Q8**. Les formules de dérivation terme à terme et du produit de Cauchy sont rarement justifiées.

**Q9**. Ne pas oublier de considérer les conditions initiales. Notons que le théorème de Cauchy linéaire (le seul au programme) ne s'applique pas ici ($y' = F(y)$ avec $F$ non linéaire).

**Q10**. Le fait que $f$ n'a pas de limite finie en $\pi/2$ ne prouve rien à priori sur la convergence de la série. Le bonne approche consistait à raisonner par l'absurde.

### I.C – Partie paire et partie impaire du développement en série entière

**Q11**. Une question généralement bien traitée. Des confusions toutefois chez certains candidats qui y voient une question sur les séries entières ou ignorent le sens de fonctions « paires » et « impaires ».

**Q12**. Idéalement, il faudrait justifier pourquoi la partie paire/impaire d'une fonction développable en série entière est donnée par la somme des termes pairs/impairs de son développement. On pouvait d'ailleurs calculer $f(x) \pm f(-x)$ et simplifier pour obtenir les formules attendues.

**Q13**. Le taux d'échec à cette question a été une grande surprise pour les correcteurs. Les candidats font preuve d'une grande maladresse pour interpréter la formule qu'ils viennent de démontrer et oublient qu'on ne leur demande qu'une valeur en 0. De nombreuses confusions d'indice, le même entier étant appelé indifféremment $n$ ou $2n + 1$ dans la même égalité.

**Q15**. Ici il est important d'expliquer ce que l'on fait, calculer ne suffit pas. Un raisonnement expéditif « par analogie avec **Q5** » n'était certes pas suffisant, mais il était bienvenu d'alléger les calculs en expliquant la similarité avec ceux de **Q5**.

## II Équivalent de $\alpha_{2n+1}$

### II.A – La fonction zêta

**Q16**. Le théorème de continuité des séries de fonctions est bien connu des candidats. Attention à la convergence uniforme, seulement sur tout segment ici, ce qui n'implique pas la convergence uniforme sur $]1, +\infty[$ mais suffit pour la continuité. Un nombre appréciable de candidats rappellent le caractère local de la continuité.

**Q17**. Bien traitée, parfois accompagnée de dessins très bienvenus. Quelques erreurs récurrentes : inégalités dans le mauvais sens, primitives incorrectes, oubli de passer à la limite.

**Q18**. La majorité des copies ont tenté d'extraire $C(s)$ par inversion du produit de Cauchy ; la séparation en pair/impair ne pose pas de problème de fond ici (série à termes positifs), mais cette étape mérite tout de même une justification. Erreur fréquente : $\zeta$ n'est pas une somme de série entière, en tout cas pas sous la forme donnée.

### II.B – Une formule pour la fonction cosinus

**Q19**. Le cas des intégrales de Wallis semble inspirer les candidats, qui posent généralement les bonnes intégrations par parties. La seconde nécessite un soin particulier sur les signes et les facteurs $x$ et $1/n$. Il était possible d'éviter de traiter séparément le cas $x \neq 0$, en intégrant $x^2 I_{n-2}$ par exemple, ou en justifiant la continuité en $x = 0$ ; la plupart des copies n'ont pas vu cet écueil.

**Q20**. Le « télescopage » aurait mérité une rédaction plus soigneuse, la formule étant fournie de toute façon. Erreur fréquente dans le calcul de $I_0(x)$ : $\sin(\pi x)/\pi$ au lieu de $\sin(\pi x)/2x$ (confusion entre la variable d'intégration $t$ et le paramètre $x$).

**Q21**. Question d'un abord difficile, contournée par la plupart des candidats.

### II.C – Un autre développement de tangente

**Q22**. Question où on reprend avec succès la méthode de **Q17**.

**Q23**. Question difficile car légèrement différente des questions classiques sur les séries. La positivité des termes pouvait simplifier les considérations mais cela a été peu vu.

**Q24**. Erreur très fréquente : interversion somme-limite non justifiée.

**Q25**. Pas de difficulté notable mais un manque de soin dans la rédaction (quantificateurs, simplifications hâtives, signes, emploi des questions précédentes), alors que la formule est donnée.

**Q26**. Très peu abordée.

**Q27**. Question facile mais parfois bâclée.

**Q28**. La plupart des copies qui abordent cette question se limitent à déduire le second point du premier.

**Q29**. La formule étant donnée, il est dommage que les candidats ne justifient que très peu (voire pas) l'emploi des questions précédentes, en particulier quand il s'agit de passer de $x$ à $2x$ dans les formules.

### II.D – Un équivalent de $\alpha_{2n+1}$

**Q30**. Un beau résultat hélas peu abordé.

**Q31**. Presque aucun candidat n'essaye de simplifier l'équivalent de Stirling appliqué à $(2n+1)!$.

## III Permutations alternantes

### III.A – Dénombrement des permutations alternantes

**Q32**. Beaucoup ne trouvent que 4 permutations alternantes montantes pour $n = 4$.

**Q33**. La solution générale consistant à remplacer $a_i$ par $n - a_i + 1$ n'a été aperçue que dans les toutes meilleures copies. Beaucoup de candidats pensent plutôt à inverser l'ordre des $a_i$, certains réalisant alors que cela ne fonctionne que pour $n$ pair. Pour $n$ impair, le processus qui consiste à envoyer une permutation alternante $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sur celle des deux permutations $(a_n, a_1, ..., a_{n-1})$ ou $(a_2, ..., a_n, a_1)$ qui est aussi alternante est effectivement une involution qui échange les descendantes et les montantes mais aucun candidat ne le justifie.

**Q34**. Il s'agissait de réindexer dans l'ordre strictement croissant de valeurs ; souvent les copies se contentent d'étiqueter arbitrairement les éléments.

**Q35**. Rarement abordée mais quelques bons arguments. Les candidats ont des difficultés pour décrire des opérations finalement peu classiques, la justification du facteur 2 étant particulièrement malaisée.

**Q36**. La récurrence (forte !) était simple à rédiger, raison de plus pour ne pas l'expédier d'un « par une récurrence immédiate ». Importance ici de bien citer les questions invoquées.

### III.B - Permutations aléatoires

Questions peu abordées.

## Conclusion

Outre les recommandations déjà données en introduction, on ne peut que conseiller de lire chaque partie du sujet avant d'essayer de résoudre les questions. La vue d'ensemble ainsi obtenue est souvent une bonne source d'inspiration.

Les résultats de cette année montrent une dispersion marquée avec un quart supérieur assez étalé culminant en quelques très bonnes copies.

En conclusion, sur un énoncé qui testait des aspects variés du programme de PC, on ne relève pas de lacune particulièrement récurrente. C'est plutôt le niveau de familiarité, ou simplement de pratique, des théorèmes et des méthodes qui semble faire la différence entre les candidats.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

**PC**

4 heures Calculatrices autorisées

**2018**

**Objectifs et notations**

Ce problème étudie quelques aspects de l'équation de diffusion (1) : $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$.

Cette équation modélise l'évolution au cours du temps de la température le long d'une barre métallique unidimensionnelle, ou encore l'évolution au cours du temps de la concentration d'une espèce chimique (par exemple un polluant dans une rivière assimilée à l'axe des $x$).

Le problème est constitué de quatre parties.

— La partie I permet de démontrer quelques résultats sur la transformée de Fourier d'une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Ces résultats sont utilisés dans la partie II.

— La partie II aboutit à la résolution de l'équation (1) lorsqu'on impose à la solution $f$ d'être de classe $\mathcal{C}^2$ et de vérifier certaines conditions.

— La partie III étudie la stabilité du schéma numérique correspondant à la discrétisation de $t$ et de $x$.

— La partie IV fournit une interprétation probabiliste du paramètre qui détermine la stabilité étudiée dans la partie III.

Les parties III et IV sont indépendantes des parties I et II et largement indépendantes entre elles.

On désigne par $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour toute fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, pour tout réel $t_0 > 0$, on note $h(t_0, \cdot)$ la fonction partielle $x \mapsto h(t_0, x)$ définie sur $\mathbb{R}$ ; de même, pour tout réel $x_0$, on note $h(\cdot, x_0)$ la fonction partielle $t \mapsto h(t, x_0)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $a$ et $b$ sont deux entiers tels que $a \leqslant b$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers $k$ vérifiant $a \leqslant k \leqslant b$.

Pour tout réel $\sigma > 0$, $g_\sigma$ désigne la fonction $g_\sigma : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{array}\right.$.

## I Préliminaires

Dans cette partie, on fixe un réel strictement positif $\sigma$.

### I.A – *Quelques propriétés de $g_\sigma$*

**Q 1.** Montrer que $g_\sigma$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

**Q 2.** En admettant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\,\mathrm{d}x$.

**Q 3.** Étudier les variations de $g_\sigma$. Montrer que la dérivée seconde de $g_\sigma$ s'annule en changeant de signe en exactement deux points. Donner l'allure de la courbe représentative de $g_\sigma$ et placer les deux points précédents.

### I.B – Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

**Q 4.** Montrer que, pour tout réel $\xi$, la fonction $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x) \end{array}\right.$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit alors la fonction $\mathcal{F}(f) : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \xi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$.

On dit que $\mathcal{F}(f)$ est la transformée de Fourier de $f$.

**Q 5.** Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

### I.C – Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f$ et sa dérivée $f'$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

**Q 6.** Montrer que $f$ tend vers zéro en $+\infty$ et en $-\infty$.

**Q 7.** Montrer que, pour tout réel $\xi$, $\mathcal{F}(f')(\xi) = 2\mathrm{i}\pi\xi\,\mathcal{F}(f)(\xi)$.

### I.D –

**Q 8.** Montrer que, pour tout entier naturel $p$, la fonction $x \mapsto x^{2p}\exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On note $M_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

**Q 9.** Pour $p$ entier naturel, donner une relation entre $M_{p+1}$ et $M_p$ et en déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$$

**Q 10.** Montrer que, pour tout réel $\xi$, il existe une suite réelle $(c_p(\xi))_{p\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(-x^2)\cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\exp(-x^2)x^{2p}$$

**Q 11.** En déduire que, pour tout réel $\xi$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp(-\pi^2\xi^2)$.

**Q 12.** On pose $\sigma' = \dfrac{1}{2\pi\sigma}$. Montrer qu'il existe un réel $\mu$ tel que $\mathcal{F}(g_\sigma) = \mu g_{\sigma'}$.
La valeur de $\mu$ n'est pas à expliciter.

# II Équation de diffusion avec une condition initiale gaussienne

Dans cette partie, $\sigma$ désigne un réel strictement positif. On cherche les éléments $f$ de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

i. l'équation de diffusion : $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$ ;

ii. les trois conditions de domination : pour tout réel $T > 0$, il existe des fonctions $\phi_T$, $\chi_T$ et $\psi_T$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall t \in ]0,T[, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} |f(t,x)| \leqslant \phi_T(x) \\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \chi_T(x) \\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| \leqslant \psi_T(x) \end{cases} \quad ;$$

iii. la condition aux limites : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t,x) = g_\sigma(x)$.

**Q 13.** Montrer que la fonction $\left|\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (t,x) \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) \end{array}\right.$ vérifie les conditions i et iii.

On admet que cette fonction vérifie également les trois conditions de domination ii. L'objectif est de démontrer que c'est la seule fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant i, ii et iii.
Pour cela, on note $f$ une fonction qui vérifie i, ii et iii.

***II.A*** –

**Q 14.** Justifier que, pour tout réel $t > 0$ et tout réel $\xi$, la fonction $x \mapsto f(t,x)\exp(-2\mathrm{i}\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit alors la fonction $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par : $\forall (t,\xi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\hat{f}(t,\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x$.

Avec les notations de la partie I, on a ainsi, pour tout réel $t > 0$, $\hat{f}(t,\cdot) = \mathcal{F}(f(t,\cdot))$.

**Q 15.** Montrer que, pour tout nombre réel $\xi$, $\lim\limits_{t\to 0^+} \hat{f}(t,\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$.

On pourra utiliser une suite quelconque $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs convergeant vers zéro.

**Q 16.** Montrer que, pour tout réel $\xi$ et tout réel $t > 0$, $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x$.

**Q 17.** En remarquant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right)(\xi)$ et en utilisant la question 7, montrer que, pour tout réel $\xi$ et tout réel $t > 0$, $\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,\xi) = -4\pi^2\xi^2\hat{f}(t,\xi)$.

***II.B*** –

**Q 18.** Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, il existe un réel $K(\xi)$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\hat{f}(t,\xi) = K(\xi)\exp(-4\pi^2\xi^2 t)$.

**Q 19.** En utilisant la question 15, déterminer, pour tout réel $\xi$, la valeur de $K(\xi)$.

***II.C*** –

**Q 20.** En déduire l'existence d'un réel $\nu_\sigma$ tel que, pour tout réel $\xi$ et tout réel $t > 0$,

$$\hat{f}(t,\xi) = \nu_\sigma \exp(-2\pi^2(\sigma^2 + 2t)\xi^2)$$

**Q 21.** Donner la valeur de $\nu_\sigma$.

On admet le résultat suivant :

*si $u$ et $v$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v)$, alors $u = v$.*

**Q 22.** Soit $t$ un réel strictement positif. Déduire des questions 20 et 12 l'existence d'un réel $\lambda_{t,\sigma}$ tel que

$$f(t,\cdot) = \lambda_{t,\sigma} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$$

**Q 23.** Montrer que la fonction $I : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$ est constante.

On pourra utiliser le résultat de la question 17.

**Q 24.** En déduire que, pour tout réel $t$ strictement positif, $f(t,\cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$.

# III Étude numérique

Dans cette partie, on étudie, du point de vue numérique, un certain problème de diffusion.

On fixe une fonction $f$, continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times ]0,1[$, vérifiant l'équation de diffusion

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times ]0,1[, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$$

ainsi que les conditions aux limites

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad f(t,0) = f(t,1) = 0$$

On suppose connue la fonction $f(0,\cdot)$ et on se propose d'étudier une méthode de calcul numérique de $f$.

***III.A*** –

**Q 25.** Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in ]0,1[$. Donner la limite, quand $\theta$ tend vers zéro, de $\dfrac{f(t+\theta,x) - f(t,x)}{\theta}$.

**Q 26.** Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in ]0,1[$. Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(t,x+h) - 2f(t,x) + f(t,x-h)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$.

***III.B*** – Soit $\tau$ un réel strictement positif et $q$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On pose $\delta = \dfrac{1}{q+1}$ et $r = \dfrac{\tau}{\delta^2}$.

La méthode numérique retenue consiste à discrétiser $t$ selon le pas $\tau$ et $x$ selon le pas $\delta$, ce qui amène à chercher une valeur approchée de $f(n\tau, k\delta)$, notée $f_n(k)$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, q+1]\!]$.

Compte tenu des questions 25 et 26, l'équation de diffusion et les conditions aux limites conduisent à imposer, pour tout entier naturel $n$ et tout $k \in [\![1, q]\!]$, $\dfrac{f_{n+1}(k) - f_n(k)}{\tau} = \dfrac{f_n(k+1) - 2f_n(k) + f_n(k-1)}{\delta^2}$ ainsi que $f_n(0) = f_n(q+1) = 0$ et $f_0(k) = f(0, k\delta)$ (on rappelle que la fonction $f(0,\cdot)$ est supposée connue).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix}$.

On note $I_q$ la matrice identité d'ordre $q$, et on définit la matrice $B$ carrée d'ordre $q$ par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tous $i$, $j$ dans $[\![1,q]\!]$, le coefficient de place $(i,j)$ de $B$ est égal à 1 si $|i-j|=1$ et à 0 sinon.

Enfin, on pose $A=(1-2r)I_q+rB$.

**Q 27.** Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+1}=AF_n$.

**Q 28.** Justifier que les matrices $A$ et $B$ sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_n=A^nF_0$.

**Q 29.** Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée quel que soit le choix de $F_0$ si et seulement si les valeurs propres de $A$ appartiennent à $[-1,1]$.

Soit $\lambda$ une valeur propre de $B$ et soit $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_q\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

**Q 30.** En considérant un coefficient de $Y$ dont la valeur absolue est maximale, montrer que $\lambda\in[-2,2]$ et justifier l'existence d'un élément $\theta$ de $[0,\pi]$, tel que $\lambda=2\cos\theta$.

**Q 31.** Montrer que, si on impose $y_0=y_{q+1}=0$, alors, pour tout $k\in[\![1,q]\!]$, $y_{k-1}-\lambda y_k+y_{k+1}=0$.

**Q 32.** En déduire qu'il existe $j\in[\![1,q]\!]$ tel que $\lambda=2\cos\dfrac{j\pi}{q+1}$.

**Q 33.** Déterminer le spectre de $B$ et une base de vecteurs propres de $B$.

**Q 34.** Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $r$ pour que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée quels que soient les choix de $q$ et de $F_0$.

On dit alors que le schéma numérique retenu est stable.

# IV Équation de diffusion et marche aléatoire

Le déplacement d'une particule dans une direction donnée sous l'action des chocs avec les particules voisines peut se modéliser par des déplacements successifs à droite ou à gauche équiprobables, d'une quantité strictement positive $\delta$, qui interviennent à intervalles de temps réguliers, le temps entre deux chocs étant égal à $\tau>0$.

Une variable aléatoire est dite de Rademacher si elle est à valeurs dans $\{1,-1\}$ et si elle prend les valeurs 1 et $-1$ avec la même probabilité 1/2.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables de Rademacher mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

On note, pour tout entier $n\geqslant 1$, $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$.

Ainsi, la variable aléatoire $\delta S_n$ modélise la position de la particule au temps $n\tau$.

***IV.A*** – Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n=\dfrac{1}{2}(X_n+1)$ et $Z_n=\sum_{j=1}^{n}Y_j$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

**Q 35.** Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y_n$ et celle de la variable aléatoire $Z_n$.

Soit $k$ un entier tel que $-n\leqslant k\leqslant n$.

**Q 36.** Montrer que, si $n$ et $k$ ne sont pas de même parité, alors $\mathbb{P}(S_n=k)=0$.

On rappelle que $\dbinom{n}{j}$ désigne le coefficient binomial « $j$ parmi $n$ ».

**Q 37.** Montrer que, si $n$ et $k$ sont de même parité, $\mathbb{P}(S_n=k)=\dbinom{n}{(k+n)/2}\dfrac{1}{2^n}$.

***IV.B*** – Pour $x$ réel, on note $\lfloor x\rfloor$ la partie entière de $x$.

**Q 38.** Pour tous réels $\delta>0$ et $\tau>0$, calculer $\mathbb{V}\left(\delta S_{\lfloor 1/\tau\rfloor}\right)$, variance de la variable aléatoire $\delta S_{\lfloor 1/\tau\rfloor}$.

**Q 39.** Montrer que, pour tout réel $\delta$, $\mathbb{V}\left(\delta S_{\lfloor 1/\tau\rfloor}\right)$ est équivalent à $\dfrac{\delta^2}{\tau}$, lorsque $\tau$ tend vers 0 par valeurs supérieures.

**Q 40.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $k\in\mathbb{Z}$, en posant $p_n(k)=\mathbb{P}(S_n=k)$, montrer que

$$\frac{p_{n+1}(k)-p_n(k)}{\tau}=\frac{\delta^2}{2\tau}\,\frac{p_n(k+1)-2p_n(k)+p_n(k-1)}{\delta^2}$$

**Q 41.** En déduire une interprétation probabiliste de la condition de stabilité étudiée à la partie III.

• • • FIN • • •

Concours Centrale-Supélec 2018 filière PC

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Ce sujet étudie sous plusieurs angles l'équation de diffusion (1) : $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$ où $f$ est une fonction de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. La partie I étudie quelques propriétés de la transformation de Fourier d'une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie II établit l'existence et l'unicité d'une solution de (1) lorsqu'on impose certaines conditions à la fonction $f$. La partie III étudie la stabilité du schéma numérique associé à (1) correspondant à la discrétisation de $t$ et de $x$. La partie IV donne une interprétation probabiliste du paramètre qui détermine la stabilité étudiée à la partie III.

Le sujet aborde, autour de la problématique de l'équation de diffusion, de nombreux points du programme. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2, études de fonctions, calculs de dérivées, équations différentielles, développements limités, raisonnements par récurrence, lois de probabilité usuelles pour le programme de PCSI ; intégrabilité, changements de variables, intégrales à paramètres, convergence dominée, séries entières, séries de fonctions, fonctions de plusieurs variables, diagonalisation pour le programme de PC. Les difficultés sont graduelles et bien aplanies mais de nombreuses questions sont rédigées de telle sorte que le candidat soit amené à construire seul le raisonnement et l'argumentation. Une grande partie du problème est consacrée à la transformation de Fourier et aux raisonnements spécifiques de l'intégration faisant appel aux dominations.

## Analyse globale des résultats

La problématique du sujet est au cœur des préoccupations de la classe de PC et l'approche par différents thèmes (transformée de Fourier, discrétisation, marche aléatoire) devait permettre aux candidats de réinvestir les résultats du cours et de construire des raisonnements. Le premier constat concerne une accentuation de l'hétérogénéité des niveaux, et un fort étalement des notes. On trouve de nombreuses très bonnes copies de candidats qui ont bien compris ce que l'on attend d'eux, à savoir une argumentation serrée, une mise en œuvre des schémas de raisonnements standards, une rédaction soignée, et surtout qui ont bien compris les notions sous-jacentes. À l'opposé on trouve un trop grand nombre de candidats de très faible niveau avec de très grosses lacunes et un manque de savoir-faire sur les techniques fondamentales des mathématiques. Pour ces candidats le travail fourni dans la discipline est très insuffisant.

La notion d'intégrabilité est mal comprise par au moins un quart des candidats, ce qui sur ce sujet est souvent rédhibitoire. Par ailleurs, bien que les hypothèses des grands théorèmes d'intégration soient connues, leur mise en place est souvent hasardeuse. Comprendre ce que signifie le mot « intégrable », utiliser les grands théorèmes — convergence dominée, dérivation sous le signe intégrale, intégration terme à terme — cela constitue l'un des objectifs fondamentaux du programme de PC et à ce titre ce sujet constitue un recueil de ces savoir-faire. Notons également, mais ce n'est pas nouveau, que la gestion des nombres complexes pose de gros problèmes, notamment la notion de module. Concernant les compétences en calcul, encore une fois les niveaux sont hétérogènes, mais l'impression générale qui se dégage est plutôt satisfaisante.

Dans ce sujet il fallait plusieurs fois vérifier un résultat donné dans le texte : il faut mettre en garde les candidats sur le fait que dans ce cas, une réponse non argumentée, voire mensongère, entraine évidemment une pénalisation qui peut être effective, ou se traduire par un doute systématique sur la suite de la copie. Concernant la capacité à rédiger une solution rigoureuse, on constate que de nombreux candidats ont bien compris qu'il fallait argumenter sérieusement, mais il s'agit bien entendu d'utiliser des arguments convaincants, et à cet égard certaines questions sont révélatrices du niveau de rigueur des candidats. Ainsi, les candidats trop pressés d'avancer finissent par le payer assez cher en perdant un point ou deux sur chaque question souvent pour des arguments qu'ils connaissent mais oublient de citer, et tout cela cumulé peut faire un quart de la note finale. De plus, des points de bonus ont été accordés aux candidats faisant preuve de soin et de rigueur dans la rédaction des questions délicates.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### I Préliminaires

**Q1.** Cette question a donné lieu à des réponses surprenantes concernant la notion d'intégrabilité. On rencontre plus souvent que les années précédentes des erreurs graves : si la fonction converge vers 0 en $+\infty$, ou $y$ admet une limite finie, alors l'intégrale est « faussement impropre en $+\infty$ » ; une fonction bornée comme par exemple $x \mapsto \exp(\mathrm{i}x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ ; le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.... La continuité de la fonction $g_\sigma$ est souvent omise ou seulement citée sur l'intervalle $[-1, 1]$ ; la comparaison à la fonction $x \mapsto 1/x^2$ nécessite d'indiquer que cette fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ (et non sur $\mathbb{R}$ comme on le voit parfois). Attention la fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ ne fait pas partie des fonctions intégrables de référence du programme et être « du type $\exp(-x^n)$ » n'est évidemment pas un argument recevable !

**Q2.** L'oubli de justification de l'éligibilité pour le changement de variable dans l'intégrale généralisée est pénalisé. Il ne faut évidemment pas se contenter de poser $u^2 = x^2/(2\sigma^2)$, ce qui à priori n'a pas de sens.

**Q3.** Il faut justifier que la fonction $g_\sigma$ est bien de classe $C^2$ avant de se lancer dans les calculs.

**Q4.** On voit parfois qu'une fonction bornée, comme par exemple $x \mapsto \exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, puis que le produit de deux fonctions intégrables est intégrable ; on voit également que $\lim_{x\to+\infty} \exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x) = 0$ (voir les remarques générales sur la mauvaise compréhension de la notion d'intégrabilité et la gestion des nombres complexes). Le fait que la fonction $f$ soit à valeurs complexes a posé des soucis pour la domination de $f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)$ : beaucoup de candidats reviennent à la partie réelle et la partie imaginaire, sans doute par peur d'utiliser le module, ce qui alourdit le raisonnement.

**Q5.** Question plutôt bien traitée, on voit apparaitre soudainement des quantificateurs dans cette question, de la rigueur le temps d'une question : on déclare les variables et on parle de $x \mapsto f(x)$, mais le contraste est assez troublant avec ce qui précède ou l'on parle souvent de « la fonction $f(x)$ ». La notion de fonction mérite qu'on s'y attarde et que l'on prenne le temps d'en saisir le sens.

**Q6.** Cette question n'a été abordée que par un candidat sur deux et très peu réussie. Elle nécessitait, et c'est un des objectifs de cette épreuve, de produire un enchainement d'arguments simples en commençant par l'intégrabilité de $f'$. Cependant, la plupart des candidats pensent que l'existence d'une limite nulle en $+\infty$ est une condition nécessaire d'intégrabilité, ce qui clôt le débat (la confusion avec la condition nécessaire de convergence pour les séries est très fréquente). Les candidats qui ont franchi cette difficulté ont été largement récompensés.

**Q7.** L'utilisation d'une intégration par parties nécessite de préciser que les fonctions concernées sont de classe $C^1$. Certains candidats ont essayé sans succès de dériver sous le signe intégral, mais ici $x$ n'est pas un paramètre : c'est une confusion entre $F(f')$ et $\big(F(f)\big)'$.

**Q8.** On retrouve les mêmes erreurs qu'à la question 1, avec parfois une primitive de $\exp(-x^2)$ égale à $-\exp(-x^2)/(2x)$. Beaucoup trop de candidats ne sont réellement pas à l'aise avec la notion d'intégrabilité : une question « évidente » qui se traite en une ligne peut donner lieu à des solutions extrêmement compliquées et confuses. Certains ont prouvé ce résultat par récurrence et ainsi obtenu la relation de la question 9, mais que de complications pour si peu !

**Q9.** Question plutôt bien réussie par la majorité des candidats pour ce qui concerne la relation de récurrence. Mais une fois obtenue la relation liant $M_{p+1}$ et $M_p$, la formule de $M_p$ étant donnée dans le texte, il fallait argumenter (pas nécessairement par une récurrence) et non justifier par un : « on en déduit de façon évidente que ».

**Q10.** Il fallait bien entendu préciser le rayon de convergence de la série entière de la fonction cosinus.

**Q11.** Peu de candidats ont vu que l'intégrale de la partie imaginaire était nulle. La plupart des candidats voient qu'il s'agit d'une intégration terme à terme mais rédigent très mal : on omet de signaler la convergence de la série des intégrales des modules, ou on laisse apparaitre un $(-1)^p$ dans cette série. On parle de temps en temps de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ en lien avec le rayon de convergence infini de la série entière ! Encore une fois le résultat étant donné, il était assez simple en remontant les calculs à l'envers de le produire. C'est bien ici la rédaction rigoureuse de la justification de l'intégration qui était attendue.

**Q12.** Les candidats qui ont déterminé et retenu la valeur de $\mu$ ont pu l'exploiter à la question 20.

### II Équation de diffusion avec une condition initiale gaussienne

**Q13.** Certains candidats, peu nombreux, pensent à exploiter le résultat de la question 4 pour calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$. Il ne faut pas attendre du correcteur qu'il fasse lui-même les simplifications de constantes pour vérifier l'égalité car en effet les réponses non simplifiées ont été légion. Certains concluent même qu'il y a égalité alors que ce n'est pas le cas à l'issue de leurs calculs.

**Q14.** La domination sur l'intervalle ouvert $]0,T[$ nécessitait de choisir $T$ en fonction de $t$, ce qui est peu souvent envisagé (un candidat sur 10 a soulevé ce problème).

**Q15.** Dans cette question utilisant la convergence dominée et la définition séquentielle de la limite, de nombreux candidats ont fourni une solution soignée, mais la majorité des copies produit un raisonnement confus où surnage parfois la convergence dominée mais sans que les objets concernés soient clairement définis. Il fallait aussi choisir $T$ en fonction de la suite $(t_n)$, ce que très peu de candidats ont vu.

**Q16.** Question abordée plus souvent que la question précédente. La démarche demandée étant proche du cours, les hypothèses du théorème de Leibniz sont souvent bien citées. Même problème pour le choix de $T$, avec ici une domination de $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ grâce à l'équation de diffusion.

**Q17.** Les candidats ayant utilisé l'équation de diffusion à la question précédente ont le plus souvent pensé à faire apparaitre la dérivée seconde spatiale, mais les justifications ne sont pas toujours très claires !

**Q18.** Un minimum de justifications était demandé : équation différentielle linéaire, quelle est la variable de cette fonction ? À noter que la constante $K(\xi)$ est à priori complexe.

**Q19.** Question facile, réussie par tous les candidats qui l'ont abordée.

**Q20.** Question de synthèse et de calcul, que les candidats qui avaient obtenu la valeur de $\mu$ à la question 12 ont abordé avec plus de facilité.

**Q21.** Rarement traitée correctement. Beaucoup de candidats ont ici déserté la partie II pour se consacrer aux parties suivantes.

**Q22.** Seuls 20 % des candidats abordent cette fin de la partie II, les réponses sont souvent confuses, la linéarité de la transformation de Fourier est parfois citée. Encore une fois ceux qui ont trouvé $\mu = \sigma'\sqrt{2\pi}$ ont obtenu directement $\lambda_{t,\sigma} = 1$.

**Q23.** Question plus facile mais peu abordée.

**Q24.** Résultat obtenu le plus souvent par les candidats ayant calculé la valeur de $\mu$.

### III Étude numérique

**Q25.** Bien traitée dans l'ensemble (ne pas oublier de préciser que $f$ est de classe $C^1$). Les mauvaises réponses évoquent la dérivée $f'(t,x)$ ou encore $\dfrac{\partial f}{\partial t}(0,x)$.

**Q26.** Les candidats qui n'ont pas pensé au développement de Taylor ont tenté, bien entendu sans succès, de conclure par un empilement de taux d'accroissement. Les développements de Taylor sont le plus souvent corrects bien que mal justifiés ($C^2$).

**Q27.** Question plutôt bien réussie, mais les cas particuliers aux bords sont rarement évoqués. Il y a de nombreuses tentatives de démonstration par récurrence : ces candidats concluent qu'ils ont démontré le résultat par récurrence alors qu'en pratique ce n'est pas le cas.

**Q28.** Question plutôt bien réussie, mais de nombreux candidats qui ont reconnu une matrice $A$ symétrique ont omis de dire qu'elle est à coefficients réels, ils n'ont donc pas répondu à la question. Attention, la somme de deux matrices diagonalisables ne l'est pas forcément ! Surprenante erreur d'accord de l'adjectif, on évoque assez souvent le « théorème spectrale ». À noter qu'il est inutile de diagonaliser $A$ pour prouver que $F_n = A^n F_0$.

**Q29.** Cette question a été considérée comme simple par la plupart des candidats qui l'ont abordée (50 %) : la matrice $A$ est diagonalisable, donc $A^n = P^{-1}D^nP$ où $D^n$ est la matrice diagonale des valeurs propres élevées à la puissance $n$, laquelle matrice $D^n$ est bornée si et seulement si toutes les valeurs propres de $A$ appartiennent à $[-1,1]$, et de plus $A^n$ est bornée si et seulement si $D^n$ l'est ; il ne reste plus qu'à multiplier par la constante $F_0$ pour conclure. Encore faut il expliciter la norme matricielle utilisée dans ce raisonnement, et ces conditions sont-elles réellement nécessaires et suffisantes ? Autant de points qui n'ont étés abordés que par très peu de candidats.

**Q30.** Raisonnement classique de majoration pour la norme sup, assez souvent bien traité. Attention, il ne suffit pas de dire que si $\theta \in [0,\pi]$, $-2 \leqslant 2\cos\theta \leqslant 2$ pour en déduire l'existence de $\theta$ vérifiant $2\cos\theta = \lambda$, c'est un point bêtement perdu.

**Q31.** Question facile qui aurait pu figurer avant la question 30 et l'aurait sans doute simplifiée. Elle servait de tremplin pour la question suivante.

**Q32.** Cette question, un classique de l'algèbre linéaire, a été abordée par 10 % des candidats avec un très faible taux de réussite. Cela s'explique par le fait qu'elle arrivait loin dans le sujet au moment ou les candidats avaient donné déjà beaucoup et se rendaient compte qu'ils partaient dans un marathon de calcul. Toutes les difficultés s'empilent ici, résolution d'une équation à solutions complexes, formules d'Euler et de Moivre, résolution d'équations trigonométriques...

**Q33.** et Q34 Très rarement traitées.

### IV Équation de diffusion et marche aléatoire

Il n'y avait pas de réelles difficultés dans cette partie portant sur le programme de PCSI, sinon de rédaction.

**Q35.** La loi de Bernoulli est le plus souvent obtenue par les candidats qui traitent la question (56 %), mais on oublie assez souvent de parler de l'indépendance pour justifier la loi binomiale, que certains retrouvent par un raisonnement (celui du cours) inutile.

**Q36.** Comme indiqué précédemment, beaucoup de méthodes descriptives peu, voire pas du tout, convaincantes. Des candidats ont fait une récurrence sur $n$, correcte, mais longue à rédiger.

**Q37.** Conséquence immédiate des deux questions précédentes pour ceux qui ont obtenu la relation liant $Z_n$ et $S_n$ et la loi de $S_n$, certains candidats ont tout de même réussi à y répondre à l'aide d'un dénombrement sans avoir reconnu la loi binomiale.

**Q38.** Question facile si l'on relie $Z_n$ et $S_n$, peu abordée (15 %).

**Q39.** Il fallait justifier que $\lfloor 1/\tau \rfloor \sim_{0^+} 1/\tau$.

**Q40.** Deux voies possibles pour cette question, également choisies par les candidats : l'application de la formule de Pascal avec disjonction des cas ou la formule des probabilités totales. Seules les meilleures copies y arrivent.

**Q41.** À peine plus d'une dizaine de candidats arrivent à répondre, de façon cohérente vis-à-vis du sujet, à cette question.

## Conclusion

Ce sujet complet et dense, certainement apprécié des candidats bien préparés, est au cœur du programme de PC et proche des contenus du cours. Il a mis en évidence une très forte hétérogénéité des niveaux, et de réelles difficultés liées à la notion d'intégrabilité d'une fonction et aux théorèmes puissants associés. Cependant plus d'un tiers des candidats ont produit un travail de qualité.

# Mathématiques 2

PC

4 heures Calculatrices autorisées

2018

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

**Objectifs et notations**

Le fil conducteur du problème est l'étude de certaines questions liées à la fonction zêta, notée $\zeta$, définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

— Dans la partie I, on introduit la fonction $\zeta$ et on étudie son allure (variations, limites, courbe représentative).
— La partie II étudie une fonction $f$ définie comme la somme d'une série de fonctions. Le développement en série entière de la fonction $f$ fait intervenir la fonction $\zeta$.
— La partie III utilise la fonction $\zeta$ pour construire une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ et montrer des résultats liant les probabilités et l'arithmétique.

## I Fonction zêta

On note $\zeta$ la fonction de la variable réelle $x$ définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

On note $\mathcal{D}_\zeta$ son ensemble de définition.

**Q 1.** Déterminer $\mathcal{D}_\zeta$.

**Q 2.** Montrer que $\zeta$ est continue sur $\mathcal{D}_\zeta$.

**Q 3.** Étudier le sens de variation de $\zeta$.

**Q 4.** Justifier que $\zeta$ admet une limite en $+\infty$.

**Q 5.** Soit $x \in \mathcal{D}_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

**Q 6.** En déduire, que pour tout $x \in \mathcal{D}_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$$

**Q 7.** Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque $x$ tend vers 1 par valeurs supérieures.

**Q 8.** Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Q 9.** Donner l'allure de la courbe représentative de $\zeta$.

## II Étude d'une fonction définie par une somme

Dans cette partie, $f$ désigne la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right)$$

On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de $f$.

### *II.A – Ensemble de définition et variations*

**Q 10.** Déterminer $\mathcal{D}_f$.

**Q 11.** Montrer que $f$ est continue sur $\mathcal{D}_f$ et étudier ses variations.

***II.B – Équivalents***

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

**Q 12.** Calculer $f(k)$.

**Q 13.** En déduire un équivalent de $f$ en $+\infty$.

**Q 14.** Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, vérifier que $x + k \in \mathcal{D}_f$, puis calculer $f(x+k) - f(x)$.

**Q 15.** En déduire un équivalent de $f$ en $-k$. Quelles sont les limites à droite et à gauche de $f$ en $-k$ ?

***II.C – Série entière***

On considère la série entière de la variable réelle $x$ donnée par $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^*} (-1)^k \zeta(k+1) x^k$.

**Q 16.** Déterminer le rayon de convergence $R$ de cette série entière. Y a-t-il convergence en $x = \pm R$ ?

**Q 17.** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$.

**Q 18.** Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad |f^{(k)}(x)| \leqslant k! \left( A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}} \right)$$

**Q 19.** En déduire que $f$ est développable en série entière sur $\left]-1, 1\right[$ et que

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1) x^k$$

***II.D – Intégrales***

**Q 20.** Déterminer pour quels $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale ci-dessous est convergente

$$\int_0^1 \frac{t^x - 1}{1 - t} \, \mathrm{d}t$$

**Q 21.** En remarquant que, pour tout $t \in [0, 1[$, $\dfrac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$, montrer que

$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{1 - t} \, \mathrm{d}t$$

**Q 22.** Déduire des questions précédentes une expression intégrale de $\zeta(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

**Q 23.** Montrer enfin que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(k+1) = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{\mathrm{e}^u - 1} \, \mathrm{d}u$$

# III Probabilités

### Rappels d'arithmétique

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires d'arithmétique.

— Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, on dit que $a$ divise $b$ s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ka$. On dit aussi que $a$ est un diviseur de $b$, ou encore que $b$ est multiple de $a$.

Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on note $a\mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples de $a$ dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi, $a$ divise $b$ si et seulement si $b \in a\mathbb{N}^*$.

— Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, le plus grand commun diviseur (PGCD) de $a$ et $b$ est l'entier naturel noté $a \wedge b$ tel que

$$a \wedge b = \max \{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b\}$$

— Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$n \text{ divise } a \wedge b \iff n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b$$

— On dit qu'un entier naturel $p$ supérieur ou égal à 2 est un nombre premier si ses seuls diviseurs sont 1 et $p$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que $\mathcal{P}$ est infini.
On note $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.

— Si $n \in \mathbb{N}^*$, si $q_1, ..., q_n$ sont des nombres premiers distincts et, alors pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$(\forall i \in [\![1, n]\!], \quad q_i \text{ divise } a) \iff \prod_{i=1}^{n} q_i \text{ divise } a$$

— Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \geqslant 2$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p$ divise $a$.

### *III.A – Loi zêta*

**Q 24.** Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Montrer qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x) n^x}$$

On dira qu'une telle variable aléatoire $X$ suit la loi de probabilité zêta de paramètre $x$.

Dans les questions suivantes de cette sous-partie III.A, on suppose que $X$ est une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x > 1$.

**Q 25.** Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $x$ pour que $X$ admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de $\zeta$.

**Q 26.** Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $x$ pour que $X^k$ admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de $\zeta$.

**Q 27.** En déduire la variance de $X$.

**Q 28.** Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^x}$.

### *III.B – Mutuelle indépendance*

Soit $x$ un réel tel que $x > 1$ et soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x$.

Soit enfin $(q_1, ..., q_n) \in \mathcal{P}^n$, un $n$-uplet de nombres premiers distincts.

**Q 29.** Montrer que les événements $(X \in q_1\mathbb{N}^*), ..., (X \in q_n\mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

Cela entraine, et on ne demande pas de le démontrer, que leurs complémentaires sont mutuellement indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n$ l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

**Q 30.** Montrer que $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X = 1)$. En déduire que

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$$

### *III.C – Deux variables indépendantes suivant une loi zêta*

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de probabilité zêta de paramètre $x$. Soit $A$ l'événement « Aucun nombre premier ne divise $X$ et $Y$ simultanément ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $C_n$ l'événement

$$C_n = \bigcap_{k=1}^{n} ((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*))$$

**Q 31.** Exprimer l'événement $A$ à l'aide des événements $C_n$. En déduire que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}$$

### *III.D – Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme*

Soient $U_n$ et $V_n$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $W_n = U_n \wedge V_n$.

**Q 32.** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2$$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\mathbb{P}(W_n = k))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell_k$.

**Q 33.** Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \geqslant M \implies 1 - \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1$$

**Q 34.** En déduire que $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

On note $W$ une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ qui suit cette loi de probabilité. En adaptant la méthode de la question 33, on peut établir que, pour tout partie $B$ de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(W \in B) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(W_n \in B)$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

Enfin, on admet le résultat suivant : si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(Y \in a\mathbb{N}^*)$, alors $X$ et $Y$ ont la même loi de probabilité.

**Q 35.** Préciser la loi de $W$. En considérant $\ell_1$, que peut-on alors en conclure ?

---

• • • FIN • • •

---

Concours Centrale-Supélec 2018 filière PC

# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le sujet est constitué de trois parties indépendantes dont le fil conducteur est la fonction zêta de Riemann. La partie I est consacrée à l'étude de cette fonction, la partie II considère une série de fonctions dont le développement en série entière possède des coefficients qui s'expriment à l'aide de la fonction zêta, et la partie III utilise une loi de probabilité reliée à la fonction zêta pour établir des résultats mêlant les probabilités et l'arithmétique.

Le sujet permet de tester les connaissances des candidats sur de nombreux points en analyse (théorèmes d'encadrement pour les limites, comparaison série-intégrale, séries de fonctions, séries entières, intégrales généralisées) et sur les probabilités (probabilité sur N, variable aléatoire discrète, espérance, variance, événements mutuellement indépendants).

## Analyse globale des résultats

Une grande majorité de candidats a plutôt bien traité la partie I qui est classique et accessible, et dans une moindre mesure la sous-partie III.A qui traite de notions de base des probabilités.

La différence s'est souvent faite sur la partie II qui nécessite une bonne approche intuitive pour la sous-partie II.B (télescopages de termes dans des séries et obtention d'équivalents, les deux à savoir confirmer par des justifications suffisamment convaincantes) ainsi qu'une bonne connaissance et maitrise des principales notions d'analyse au programme et des théorèmes qui s'y rapportent pour ses autres sous-parties.

Les sous-parties III.B et III.C ont été aussi assez discriminantes dans la mesure où des notions ou propriétés plus délicates de probabilités interviennent comme l'indépendance mutuelle ou le résultat de continuité décroissante des probabilités. La sous-partie III.D est assez peu traitée.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### I Fonction zêta

**Q2.** Question plutôt bien traitée dans l'ensemble car très classique. Les quelques rares candidats disant que $f$ est continue comme somme de fonctions continues ont été sévèrement sanctionnés.

**Q3.** Certains dérivent la série de fonctions au lieu d'utiliser la décroissance de chacune des fonctions, la plupart sans énoncer et vérifier correctement les hypothèses, certains même dérivent par rapport à $n$. D'autres candidats pensent que considérer le signe de $f(x+1)-f(x)$ suffit pour étudier les variations de $f$.

**Q4.** Quelques rares candidats montrent que leurs connaissances sont très superficielles et confondent le fait que la somme de la série de fonctions admet une limite quand $x$ tend vers $+\infty$ avec le fait que la série converge.

**Q5.** et **Q6.** Questions très classiques de comparaison série-intégrale où certains candidats se sont contentés d'une figure explicative pour la question 5. Le jury a été attentif entre autres à l'évocation des problèmes de convergence (des intégrales et de la série).

**Q7.** et **Q8.** Ces questions faciles utilisant les théorèmes d'encadrement pour les limites ont été plus ou moins bien rédigées. Attention aux rédactions qui font croire que le candidat pense qu'une limite existe forcément.

**Q9.** Les candidats se doivent de soigner suffisamment les tracés en plaçant notamment les deux asymptotes.

### II Étude d'une fonction définie par une somme

**Q10.** La plupart des candidats justifient assez bien la convergence de la série. Une bonne partie d'entre eux n'obtiennent cependant pas le bon ensemble de définition, beaucoup se plaçant sur $]-1,+\infty[$.

**Q11.** Les candidats ayant le souci de prouver la convergence uniforme de la série de fonctions ont plus de difficultés qu'en question 1 pour établir une majoration uniforme correcte du terme général de la série. Certains candidats dérivent encore la série de fonctions. La plupart parlent de décroissance sur $Df$ et non pas sur tout intervalle de $Df$.

**Q12.–Q15.** Certains candidats trouvent de bonnes réponses mais ont des difficultés pour les justifier correctement. Quelques candidats écrivent à un moment donné des séries manifestement divergentes (du type série harmonique), ce qui est sévèrement sanctionné.

**Q16.** La plupart des candidats trouvent bien un rayon de convergence valant 1 (quelques-uns trouvent un rayon infini ou d'autres même $-1$) mais en utilisant des justifications plus ou moins convaincantes. Nous rappelons que la version série entière du critère de D'Alembert n'est pas au programme. Certains voulant absolument utiliser le critère spécial des séries alternées pensent pouvoir montrer la convergence de la série entière pour $x = 1$ alors que son terme général ne tend pas vers 0 d'après la partie I.

**Q17.** Question permettant de vérifier à nouveau que les candidats connaissent les hypothèses des principaux théorèmes sur les séries de fonctions et qu'ils savent justifier la convergence uniforme à l'aide d'une majoration.

**Q18.** La plupart des candidats ayant abordé cette question obtiennent un $A$ qui dépend de $k$ et de $x$, ce qui met en évidence une mauvaise compréhension du rôle des quantificateurs. Certains croient voir une série alternée (en confondant $k$ et $n$) en vue d'utiliser une majoration classique du reste en valeur absolue.

**Q19.** Le fait que la fonction soit développable en série entière donne souvent lieu à des justifications farfelues (par exemple, si la série de Taylor de $f$ converge, alors $f$ est développable en série entière). Le jury a apprécié l'honnêteté des candidats qui ont admis ce résultat pour en déduire l'expression demandée de $f(x)$.

**Q20.** Question ayant posé beaucoup de difficulté alors qu'il s'agit d'une question relativement classique sur la convergence des intégrales impropres (comparaison à une intégrale de Riemann en 0 et prolongement par continuité en 1).

**Q21.** Peu de candidats ont correctement justifié l'interversion série-intégrale (il fallait utiliser la version de ce résultat pour un intervalle quelconque et non pas celle utilisant la convergence uniforme sur un segment), le calcul de l'interversion ayant été fait par un plus grand nombre.

**Q22.** Certains candidats utilisent le résultat d'unicité du développement en série entière de façon inappropriée en comparant une série entière avec une série numérique.

**Q23.** Le jury attendait dans cette question les justifications habituelles lors d'un changement de variable dans une intégrale : bijection strictement monotone de classe $C^1$.

### III Probabilités

**Q24.** Question facile où quelques candidats ont montré de grandes maladresses (certains allant même jusqu'à écrire des énormités) dans le calcul avec des sommes et des quotients pour montrer le résultat de normalisation d'une probabilité.

**Q25.** Les candidats ayant évoqué seulement la convergence de la série représentant l'espérance et non la convergence absolue ou la positivité des termes de la série ont été légèrement sanctionnés.

**Q26.** Le jury attendait l'utilisation explicite du théorème de transfert. Certains candidats en ont donné une version très personnelle.

**Q28.** Les candidats ayant détaillé leur raisonnement ont été favorisés (utilisation d'un système complet d'événements ou réunion d'événements deux à deux incompatibles). Malheureusement, certains d'entre eux ont évoqué par confusion la notion d'indépendance.

**Q29.** La définition exacte de l'indépendance mutuelle est assez largement ignorée. Beaucoup trop de candidats considèrent l'intersection globale sans prendre une sous-famille quelconque et il semble que certains candidats croient que l'indépendance deux à deux suffit.

**Q30.** et **Q31.** Questions traitées par un peu plus de la moitié des candidats, mais rarement bien rédigées. Le jury a porté son attention sur la rigueur des raisonnements lors notamment de l'utilisation effective du résultat de continuité décroissante des probabilités et de la justification suffisamment détaillée de l'indépendance mutuelle des événements pour pouvoir passer au produit des probabilités.

**Q32.–Q35.** Les dernières questions ont été assez peu traitées.

## Conclusion

Ce sujet valorise le travail sérieux sur le cours que certains candidats ont effectué tout au long de leur préparation. En effet, de nombreux thèmes sont abordés ainsi qu'un nombre relativement important de questions classiques.

Nous constatons malheureusement que le cours n'est que trop souvent partiellement maitrisé, en particulier en ce qui concerne les définitions et les grands théorèmes classiques. Nous observons aussi des maladresses pour le calcul. Par exemple, de trop nombreux candidats ont des difficultés à majorer et à minorer les fractions pour obtenir une convergence normale (**Q11.** et **Q17.**).

Nous conseillons aux candidats d'effectuer un travail régulier consistant à apprendre le cours et à le comprendre dans toutes ses nuances. De plus, la recherche d'exercices de difficultés progressives est incontournable pour l'assimilation du cours, pour la maitrise de l'art du raisonnement et des techniques classiques de calcul.

Rappelons que la présentation et la rédaction sont évaluées par les correcteurs. Il est indispensable de rédiger de manière à la fois claire et précise, sans utiliser de façon trop systématique des abréviations, ce qui rend parfois certaines copies peu lisibles. Les résultats doivent être mis en évidence, en étant par exemple encadrés.