Programme de colle 8

Classe de PC

Semaine du lundi 20 au jeudi 23 novembre

Liste des questions de cours
• Ensemble de définition et caractère $\mathscr{C}^1$ de $x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Équation différentielle vérifiée par f, expression de f sans intégrale. • Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, f intégrable sur $\mathbb{R}$, et g bornée, montrer que $f * g$ est définie, continue et bornée. Si g est $\mathscr{C}^1$ et g' bornée, $f * g$ est $\mathscr{C}^1$ et expression de $(f * g)'$. • Pour tout $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ qui commutent, $g(\mathrm{Ker}\ f) \subset \mathrm{Ker}\ f$ et $g(\mathrm{Im}\ f) \subset \mathrm{Im}\ f$. • Pour tout $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\quad \mathrm{Ker}\,(v \circ u) = \mathrm{Ker}\ u \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\ v \cap \mathrm{Im}\ u = \{0\}$ • Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$. Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre.

1 Intégrales à paramètres

Ensemble de définition, théorème de continuité sous le signe somme, théorème de convergence dominée à paramètre continu, théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme, cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

2 Généralités sur les espaces vectoriels

2.1 Structure algébrique

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel, d'un morphisme d'espace vectoriel.
Caractérisation de $\mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_k)$ à l'aide des combinaisons linéaires.
Produits, sommes et sommes directes finies de sous-espaces vectoriels. Projecteurs et symétries.
Sous-espaces stables. Polynômes d'endomorphismes : polynôme annulateur, calcul d'inverse et de puissances.

2.2 Familles et bases

Définition des familles libres, familles liées, famille génératrices, bases. Théorème de la base incomplète.
Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre. Base de $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes interpolateurs de Lagrange.
Morphismes et bases : si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors $u : E \to E'$ est entièrement déterminé par la famille $(u(e_i)_{i\in I})$. Caractérisation des injections, surjections et bijections.

2.3 Dimension finie

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Caractérisation d'une base.
Base adaptée à une décomposition en somme directe. Caractérisation de $F = F_1 \oplus F_2$.
$\dim \left(\sum_{i=1}^k F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^k \dim F_i$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.
Rang d'une famille de vecteurs. $\boxed{\textbf{Théorème du rang}}$.
Méthode : Détermination de la base d'un noyau, via la résolution d'un système.